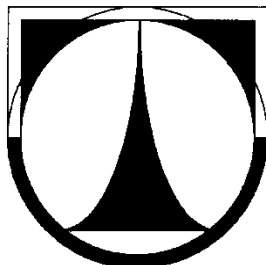


**TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI**

**FAKULTA STROJNÍ**

Katedra částí a mechanismů strojů



**NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ PRO PODPORU  
VÝZKUMU A VÝVOJE RÁMŮ  
Z KOMPOZITNÍ STRUKTURY VYZTUŽENÉ  
DLOUHÝMI VLÁKNY**

---

Habilitační práce

Michal Petruž

Liberec 2015

**TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI**

**FAKULTA STROJNÍ**

Katedra částí a mechanismů strojů

## **Habilitační práce**

k získání vědecko-pedagogického titulu docent (doc.)

v oboru

**Konstrukce strojů a zařízení**

**Numerické modelování pro podporu výzkumu a vývoje rámu z  
kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny**

Numerical modeling for the support of research and development of  
composite structures reinforced by long fibers

Ing. Michal Petrů, Ph.D.

odborný asistent, Fakulty strojní, Technické univerzity v Liberci

Program:	P2302 Stroje a zařízení
Obor habilitace:	2302V010 Konstrukce strojů a zařízení
Odborné zaměření:	Části a mechanismy strojů
Pracoviště:	Katedra částí a mechanismů strojů

# ANOTACE

Vývojová řešení rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny mohou přispět k řešení celosvětového trendu vývoje strojních částí vedoucí k odlehčování konstrukcí prostřednictvím využívání alternativních materiálových struktur. Jedná se o velmi komplexní multidisciplinární problém, pro jehož vyřešení je nutné provést řady rozsáhlých výzkumů prostřednictvím experimentů, měření a numerického modelování. Předkládaná habilitační práce se zabývá vybraným výkladem numerického modelování, které přispělo k vytvoření ucelených studií a analýz mechanických vlastností vzorků i celých rámu vyvíjených z kompozitních materiálových struktur. Byly sestaveny pokročilé numerické simulace kompozitních vzorků vyztužených uhlíkovými a skleněnými vlákny, které byly verifikovány s experimenty a také s analytickými modely. V práci jsou dále diskutovány konstrukční principy a optimalizace vývojového řešení kompozitních rámu včetně realizace laboratorního prototypového pracoviště pro výrobu ovíjení dlouhých vláken na otevřenou i uzavřenou prostorovou geometrii jádra rámu. Systematicky je popsána tvorba numerických modelů rámu vyztužených dlouhými vlákny vycházející z CAD geometrií, které se vytvořily za účelem optimalizace pevnosti a tuhosti, včetně popisu vytvoření pokročilých CAD modelů sestavených pomocí parametrických rovnic. Numerické analýzy stanovily optimální způsob kladení a směrovou orientaci vyztužujících vláken a počet vrstev vyztuže kompozitního rámu pro dané zatížení, což bylo využito při výrobě reálných kompozitních rámu. Řešení habilitační práce přináší ucelenou syntézu a výsledky, které vedly k podpoře vývojového řešení rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny a také přispěly k rozšíření a modernizaci laboratoře aplikované mechaniky Technické univerzity v Liberci.

## Klíčová slova:

Kompozitní rám, numerické modelování, dlouhá vlákna, uhlíková vlákna, skleněná vlákna, anizotropní mechanické vlastnosti, výzkum, vývoj lehkých konstrukcí.

# ANNOTATION

Development solutions of the frame from composite structures reinforced by long fibers can contribute to the worldwide trend in the development of machine parts leading to the lightening of constructions through the use of alternative material structures. It is a very difficult and complex multidisciplinary problem, for whose solution is necessary to conduct a wide range of research through experiments, measurements and numerical modeling. Presented habilitation thesis deals with selected explanation of numerical modeling which contributed to the creation of comprehensive studies and analyses of the mechanical properties of samples, even whole frames developed from the composite material structures. Advanced numerical simulations of the composite samples reinforced with carbon and glass fibers were designed and verified with experiments and analytical models as well. Construction principles and optimization of the development solution of the composite frame are being further discussed in the paper, including the realization of prototype laboratory workspace for the manufacture of long fiber coating on the open and closed spatial frame core geometry. Systematic description is given on the development of numerical models of frames reinforced by long fibers based on CAD geometry, created for the purpose of strength and stiffness optimization, including the description of advanced CAD model construction, constructed from parametric equations. Numerical analysis provided optimal placement and direction orientation of the reinforced fibers and the number of fiber layers of the composite frame for specific load, which was utilized during the manufacture of real composite frames. The resolution of the habilitation thesis brings coherent synthesis and results, which led to the support of the development solution of the frame from composite structures reinforced by long fibers and also contributed to the expansion and modernization of the laboratory for applied mechanics at the Technical University of Liberec.

## Key Words:

Composite frame, numerical modeling, long fibers, carbon fibers, glass fibers, anisotropic mechanical properties, research, development of light constructions.



# PODĚKOVÁNÍ

Tato práce byla vypracována s podporou řady projektů a grantů řešených na katedře částí a mechanismů strojů, Fakulty strojní a také laboratoře aplikované mechaniky, oddělení konstrukce strojů, Institutu pro nanomateriály, pokročilé technologie a inovace, Technické univerzity v Liberci.

Rád bych na tomto místě poděkoval všem, kteří přispěli ke vzniku této práce. Zejména bych chtěl poděkovat všem členům katedry částí a mechanismů strojů a oddělení konstrukce strojů, jmenovitě pak prof. Ing. Ladislavu Ševčíkovi, CSc. a doc. Ing. Ludvíkovi Prášilovi, CSc. za cenné rady, věcné podmínky a dlouholetou podporu.

Dále bych chtěl poděkovat Ing. Ondřeji Novákovi, Ph.D., Ing. Aleši Lufinkovi, Ph.D., Ing. Tomáši Martincovi, Ph.D., Ing. Radovanu Kovářovi a Josefu Stuchlíkovi za spolupráci nejen při sestavování experimentů a měření.

Zvláštní poděkování patří panu prof. RNDr. Bohuslavu Střížovi, DrSc. a prof. Ing. Bohuslavu Neckáři, DrSc. za cenné diskuze a kritické rozborů problematiky studie a řešení nelineárních problémů vláknenných materiálových struktur.

Na závěr bych chtěl poděkovat celé své rodině za podporu, pochopení a trpělivost během psaní této práce.

V Liberci 25. 4. 2015

Michal Petřů

# OBSAH

<b>Symbolsy, názvy, jednotky .....</b>	<b>8</b>
<b>Předmluva .....</b>	<b>12</b>
<b>1 Úvod .....</b>	<b>14</b>
1.1 Cíle habilitační práce .....	15
<b>2 Analýza mechanických vlastností vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny .....</b>	<b>18</b>
2.1 Studie a analýzy vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny .....	18
2.2 Mechanické vlastnosti vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny .....	22
2.2.1 Izotropní a anizotropní vlastnosti vzorků z vláknenných kompozitních struktur .....	22
2.2.2 Charakteristické fyzikální vlastnosti vzorků z vláknenných kompozitních struktur .....	25
2.3 Měření mechanických vlastností vzorků vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny .....	27
2.4 Analytické modely pro studii mechanických vlastností vzorků vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny .....	32
2.4.1 Fenomenologické modely .....	34
2.4.2 Semi-empirické modely .....	35
2.4.3 Homogenizované modely .....	37
2.4.4 Pružně-elastický model .....	38
2.4.5 Shrnutí poznatků z analytických modelů využitých pro získání elastických konstant vzorků příčně izotropní vláknenné kompozitní struktury .....	39
2.5 Numerické modely pro studii mechanických vlastností vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny .....	40
2.5.1 Výběr odpovídajícího programu MKP pro sestavení modelových simulací .....	41
2.5.2 MKP simulace mechanických vlastností vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny .....	43
2.5.3 Výsledky a porovnání MKP simulací s analytickými modely a měřením .....	50
2.5.4 Shrnutí poznatků z MKP simulací vytvořených pro studii a analýzu mechanických vlastností vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny .....	57
2.6 Závěr kapitoly .....	58
<b>3 Konstrukce a optimalizace rámců vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny .....</b>	<b>59</b>
3.1 Problematika konstrukčního řešení rámců vyvíjených z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny .....	59
3.2 Konstrukční řešení navíjení vláken na geometrii jádra rámu .....	62
3.2.1 Konstrukční návrhy prototypové technologie ovíjecího zařízení hlavy pro nanášení vláknenné výztuže na profilovou geometrii jádra .....	62
3.2.2 Automatizace prototypové technologie ovíjecího zařízení hlavy pro nanášení vláknenné výztuže na geometrii jádra .....	66

3.3 Numerické modelování pro podporu optimalizace konstrukčního řešení rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny .....	69
3.3.1 Parametrické rovnice pro prostorové modelování navíjení vlákenné výztuže na geometrii jádra .....	70
3.3.2 MKP modely rámu vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny .....	76
3.3.3 Shrnutí poznatků z MKP modelů rámu vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny .....	89
3.4 Výroba rámu vyvíjeného z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny .....	90
3.5 Porovnání numerických simulací a měření vyvíjených rámu z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny .....	91
3.6 Závěr kapitoly .....	96
<b>4 Příkladová studie aplikace vývojového řešení rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny .....</b>	<b>97</b>
4.1 Specifikace problému .....	97
4.2 Modifikace konstrukčního řešení navíjení vláken na geometrii jádra s proměnlivým průřezem .....	101
4.3 Numerické modelování pro podporu optimalizace navinutí dlouhého vlákenného pramence na jádro prostorového rámu s proměnlivým průřezem .....	105
4.4 Závěr kapitoly .....	113
<b>5 Závěr .....</b>	<b>114</b>
<b>Literatura .....</b>	<b>117</b>

# SYMBOLY, NÁZVY, JEDNOTKY

$t$ , čas.....	[s, ms]
$\rho$ , měrná (objemová) hmotnost, hustota.....	[kg.m <sup>-3</sup> ]
$a$ , zrychlení.....	[m.s <sup>-2</sup> ]
$T$ , teplota.....	[°C]
$f$ , cílová (kriteriální) funkce	
$M$ , množina všech reálných řešení	
$\mathbf{p}$ , hledaný (optimální) z množiny všech reálných řešení $M$	
$\hat{\mathbf{p}}$ , cílový parametr z množiny všech reálných řešení $M$	
$\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathbf{C}}$ , složky fází kompozitní struktury vyztužené vlákny	
$u_i, U_i$ posuvy do jednotlivých směrů	
$R_i$ , rotace do jednotlivých směrů	
$m_i$ , délková rozteč	
$\sigma_{ij}$ , tenzor napětí	
$\varepsilon_{ij}$ , tenzor deformace	
$x_i$ , souřadnicový systém	
$i = 1, \dots, 3, x, y, z$ , směry souřadnicového systému	
$i, j, k$ , jednotkové vektory do hlavních směrů souřadného systému	
$ijk$ , symbolika vycházející z Levi-Cevitova permutačního symbolu	
$C_{ijkl} = C_{ijkl}^v$ , tenzor elastických konstant pro danou vrstvu	
$\sigma_M^f$ , mez pevnosti vláken.....	[MPa, GPa]
$F^f$ , síla ve vláknech.....	[N, kN]
$E$ , modul pružnosti v tahu.....	[MPa, GPa]
$G$ , modul pružnosti ve smyku.....	[MPa, GPa]
$\nu$ , Poissonovo číslo.....	[-]
$\sigma^I, \sigma^{II}, \sigma^{III}, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ , hlavní napětí do jednotlivých směrů.....	[MPa, GPa]
$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ , přetvoření v hlavních osách souřadného systému.....	[-, %]
$\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{13}$ , vyjadřuje zkosení pro jednotlivé roviny.....	[-]
$\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}$ , smyková napětí v daných rovinách.....	[MPa, GPa]
$E_{11}, E_{22}, E_{33}$ , moduly pružnosti v tahu pro jednotlivé směry zatížení.....	[MPa, GPa]
$G_{12}, G_{23}, G_{13}$ , moduly pružnosti ve smyku pro jednotlivé směry zatížení.....	[MPa, GPa]
$\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$ , Poissonovo číslo pro jednotlivé směry zatížení.....	[-]
$m^c$ , celková hmotnost kompozitní struktury.....	[g, kg]
$v^c$ , celkový objem kompozitní struktury.....	[mm <sup>3</sup> , m <sup>3</sup> ]
$M^f, M^m$ , hmotnostní množství vláken, matrice.....	[%]
$V^f, V^m$ , objemové množství vláken, matrice.....	[%]
$m^f, m^m$ , hmotnost vláken, matrice.....	[g, kg]
$m^{f*}, m^{m*}$ , plošná hmotnost vláken, matrice.....	[g.m <sup>-2</sup> ]

$v^f, v^m$ , objem vláken, matrice .....	[mm <sup>3</sup> , m <sup>3</sup> ]
$\rho^f, \rho^m$ , měrná hmotnost vláken, matrice .....	[kg.m <sup>-3</sup> ]
$h$ , tloušťka kompozitní struktury .....	[mm]
$L$ , definovaná délka kompozitní struktury .....	[mm]
$b$ , šířka kompozitní struktury .....	[mm]
$R_e$ , mez kluzu .....	[MPa, GPa]
$R_M$ , mez pevnosti .....	[MPa, GPa]
$E_{11}^f, E_{22}^f$ , podélný a příčný modul pružnosti vláken .....	[MPa, GPa]
$G_{12}^f, G_{23}^f$ , smykový modul vláken pro dané směry zatížení .....	[MPa, GPa]
$G^m$ , smykový modul matrice .....	[MPa, GPa]
$\nu_{12}^f, \nu_{23}^f$ , Poissonovo číslo pro jednotlivé směry zatížení vlákna .....	[-]
$\nu^m$ , Poissonova číslo matrice .....	[-]
$K$ , objemový modul .....	[MPa, GPa]
$K^f, K^m$ , objemové moduly vláken, matrice .....	[MPa, GPa]
$\zeta$ , korekční faktor	
$\zeta^f, \zeta^m$ , korekční faktory vlákna, matrice Modifikovaného modelu podle směš. pravidla	
$\zeta'$ , je proměnná funkce v rozsahu $0 < \zeta' < 1$	
$\xi$ , konstanta, která pro $E_{22}$ je rovna 1, a pro $G_{12}$ je rovna 2	
$a_{ii}, S_{ii}^{f,m}$ , složky matic vztažené k poměrům vláken a matrice v kompozitní struktuře	
$A^I, A^{II}, A^{III}$ , proměnné funkce Pružně – elastického modelu	
$c^*$ , konstanta, která je $c^* = 1 + 4K \frac{V_{12}^2}{E_{11}}$	
$\sigma_{ii}, \sigma_{ij}$ , Cauchyho tenzor napětí	
$\sigma_{ij}^{nom}$ , tenzor nominálního napětí	
$MKP$ , metoda konečných prvků	
$MDP$ , metoda diskrétních prvků	
$MHP$ , metoda hraničních prvků	
$MKO$ , metoda konečných objemů	
$\Omega$ , souvislá oblast třírozměrného prostoru	
$\Re^3$ , množina reálných čísel v třírozměrném prostoru	
$E^3(\Re)$ , Euklidovský prostor	
$\Gamma$ , hranice souvislé oblasti	
$\mathbf{M}$ , matice hmotnosti	
$\ddot{\mathbf{u}}$ , matice zrychlení vektorů posunutí uzlů	
$\mathbf{F}^E$ , matice vektorů externích sil	
$\mathbf{F}^I$ , matice vektorů interních sil	
$B$ , prvková matice bázevých funkcí přetvoření	
$F^{kont}$ , vektor kontaktních sil	

$F^{Hurg}$	, vektor tlumících sil hourglassingu	
$\sigma_n$	, prvková matice působících napětí v prvku	
$\kappa_i$	, vektor objemových sil	
$\chi_i$	, vektor povrchových sil	
$\mathbf{u}$	, matice vektorů posunutí uzlů	
$\dot{\mathbf{u}}$	, matice rychlosti vektorů posunutí uzlů	
$u_t$	, vektor okamžitých posuvů	
$u_{t-\Delta t}$	, vektor předešlých posuvů	
$u_{t+\Delta t}$	, vektor následných posuvů	
$A_0$	, původní referenční geometrie	
$A_{t+\Delta t}$	, aktuální referenční geometrie	
$\mathbf{B}$	, matice tlumení	
$\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}$	, matice zrychlení, rychlostí, výchylek	
$\lambda_i$	, vektory protažení do hlavních směrů .....	[mm]
$l_{element}$	, velikost elementu .....	[mm]
$l_{min}$	, minimální velikost elementu .....	[mm]
$\Delta t^{krit}$	, kritický časový krok výpočtu .....	[s, ms]
$e_i$	, chyba energie napjatosti i – tého prvku	
$e$	, celková energetická chyba	
$\Theta$	, celková energie napjatosti	
$e^\Theta$	, je celková energetická chyba vztahovaná k celkové energii napjatosti $\Theta$	
$\Delta\sigma$	, rozdílové napětí $\Delta\sigma = \sigma^i - \sigma^a$	
$\sigma^i$	, primární nespojitý výsledek napětí	
$\sigma^a$	, dodatečné aproximované napětí	
$\mathbf{D}$	, matice elastických konstant	
$F_{rat}$	, hodnota $F$ - testu	
$P_{hodnota}$	, hladina významnosti	
$F_{krit}$	, kritická hodnota porovnání modelu s experimentem	
$R^2$	, koeficient determinace	
$T^{(s_i)}$	, těžiště rámu	
$d, r$	, průměr, poloměr rámu .....	[mm]
$m$	, délka přímky, délka jádra rámu .....	[mm]
$\alpha, \alpha_j, \alpha^v$	, požadovaný úhel stoupání navíjení vlákenného pramence .....	[°, rad]
$\beta^v$	, nesprávné úhlové navinutí vlákenného pramence .....	[°, rad]
$r_j$	, poloměr vzdálenosti středu osy vlákenného pramence v j – té vrstvě .....	[mm]
$\varphi$	, úhel otáčení .....	[°, rad]
$z_v$	, parametr $z_v = \varphi \frac{r_j}{tg \alpha_j}$ .....	[mm]
$\xi_{ji}$	, úhel rotace i – tého vlákenného pramence .....	[°, rad]

$\psi_j$ , směrový úhel kladení vláknenného pramence, $\psi_j \neq \xi_{ji}$ .....	[°, rad]
$q$ , smysl otáčení	
$F_N, F_T$ , normálová (osová) síla v tahu, tlaku .....	[N, kN]
$M_{ox}, M_{oy}, M_{oz}$ , ohybový moment do daného směru .....	[Nm]
$T_x, T_y$ , posouvající síla do daného směru .....	[N, kN]
$\sigma_N, \sigma_T$ , tahové, tlakové napětí .....	[MPa]
$\sigma_{ox}, \sigma_{oy}, \sigma_{oz}$ , ohybové napětí do daného směru .....	[MPa]
$\tau_k, \tau_s$ , napětí v krutu, napětí ve smyku .....	[MPa]
$\hat{C}$ , hledaná maximální tuhost pro maximální působící napětí $\hat{\sigma}$	
$\nu$ , vrstva kompozitní vláknenné struktury	
$c^\nu, s^\nu$ , výrazy, $c^\nu = \cos \alpha$ a $s^\nu = \sin \alpha$	
$\delta_{ij}$ , kroneckerova delta	
$A_i^\nu$ , jsou výrazové konstanty, závislé na počtu vláknenných vrstev	
$H$ , tloušťka $n - té$ vrstvy $\nu$	
$\lambda^m$ , množina všech napětí působících v $n$ počtu vrstev rámu	
$\mathbf{c}$ , cílová funkce	
$\tilde{\mathfrak{z}}$ , Lagrangeovy multiplikátory	
$E(\mathbf{x}, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}_0)$ , podmínka stacionárnosti Lagrangeovy funkce	
$\lambda$ , Lagrangeova konstanta	
$o_n$ , neutrální osa	
$\Lambda_i, \Gamma_j$ , omezující podmínky pro nerovnost a rovnost	
$g_i, h_j$ , omezující podmínky splňující podmínky regularity	
$\Gamma'$ , definovaná křivka v rovině $yx$	
$\Phi$ , funkce napětí	
$\vec{\nu}$ , normálový vektor	
$\wp_i$ , vektor objemových sil kromě sil setrvačných	
$n^{(i)}, n^{(j)}$ , normálový vektor kontaktního páru	
$\sigma_{HMH}$ , redukované napětí podle hypotézy HMH (Huber, Mises, Hencky) .....	[MPa]
$\sigma^*$ , přítláčné normálové napětí v čelistech .....	[MPa]
$\tau^*$ , smykové napětí v čelistech .....	[MPa]
$\sigma_D$ , dovolené napětí .....	[MPa]
$W_{ox1}, W_{ox2}$ , průřezové moduly v ohybu .....	[mm <sup>3</sup> , m <sup>3</sup> ]
$J_x$ , kvadratický moment průřezu .....	[mm <sup>4</sup> , m <sup>4</sup> ]
$w_1, w_2$ , vzdálenosti bodů 1,2 od neutrální osy $o_n$ .....	[mm]
$a_s$ , kontaktní plocha vzájemného dotyku na hranicích pramence s jádrem .....	[mm]
$\Delta F_N^E$ , změna kontaktních normálových sil .....	[N, kN]
$C_n^{Ecrit}$ , kritická hodnota normálové tuhosti kontaktu .....	[N/m]
$\delta$ , stlačování vláknenného pramence při navíjení kolem jádra .....	[mm]

# PŘEDMLUVA

*„Stupně v rozvoji lidské společnosti jsou spojeny se změnami ve využívání materiálů a lze říci, že každý nový materiál či nová struktura, kterou člověk dovedl využívat, představovala i novou kvalitu v jeho životě. Tak lidstvo prošlo dobou kamennou, dobou bronzovou, dobou železnou a směřuje na novou úroveň spojenou s tím, že budou vytvořeny nové složené synergické materiály, které příroda neposkytuje. Takové materiály jsou vytvořeny z řady komponent a mají charakter cílevědomé konstrukce“.*

*Prof. Ing. Dr. Jaroslav Němec, DrSc., Dr h.c.*

Tato slova uvedená v minulém století, jsou dokladem významu, který je dnes přikládán výzkumům vedoucím k vývoji nových materiálových struktur, které by se staly plnohodnotným materiálem pro konstrukční aplikace a splňovaly by současné požadavky na fyzikální a mechanické vlastnosti jednotlivých částí strojů. Je to dáno tím, že nová řešení strojních částí, či celých konstrukčních systémů se musí vyznačovat nejen dostatečnou pevností a odolností vůči danému zatížení, ale musí mít další vlastnosti jako je nízká hmotnost, energetická nenáročnost, malá odpadovost a recyklovatelnost, montážní jednoduchost a skladovatelnost, či v neposlední řadě se musí jednat o konstrukce se sníženým dopadem na životní prostředí. Tento komplexní složitý problém vede k novým studiím a výzkumům nekonvenčních materiálových struktur, které by se daly aplikovat do konstrukčních řešení částí strojů, a tím postupem času plně nahrazovat současné konvenční materiály. Problematika takovýchto struktur je však dána tím, že se zpravidla jedná o nehomogenní anizotropní kompozitní struktury, jejichž mechanické vlastnosti i vzhledem k stále vyvíjeným technologiím nejsou dostatečné nebo nejsou vůbec známe. Také řada faktorů (fyzikálních a geometrických) ovlivňující anizotropii v oblasti elastických a plastických deformací, či odpovídající testování pro dané zatížení komplikuje vývojová řešení. Přesto nové a stále propracovanější výzkumy vedoucí k podpoře výsledného návrhu konstrukce z odpovídající kompozitní materiálové struktury mohou být hledaným řešením ve vývoji strojních částí a zařízení v blízké budoucnosti. Zároveň jen nepatrná znalost mechanických vlastností kompozitních materiálových struktur může výrazně přispět k inovaci a optimalizaci vyvíjených strojních částí za účelem zvýšení účinnosti. Přestože byly vypracovány řady měření a teorií obecně popisující chování kompozitních materiálů, tak stále komplexnější požadavky na jejich využitelnost v nových konstrukcích, vedou na rozsáhlejší a pokročilé analýzy. Proto pro



studii a popis deformační a napěťové odezvy, teorie přechodu poruch soudržnosti z mikroobjemů (např. vlákna a matrice) do makroobjemů (stanovení pevnosti či kritické porušení navrhované součásti), představy o směru a šíření lomu je v současné době výhodné využívat moderních metod matematického modelování, zejména prostřednictvím numerických simulací metodou konečných prvků. Numerické modelování kompozitních materiálůvých struktur umožňuje přiblížit mechanické vlastnosti vzorků i celých konstrukcí, studovat složitou problematiku kontaktů, tření, povrchových sil, dokonce i mezifázových rozhraní, jejichž i nepatrná znalost může významně přispět k výslednému návrhu či vývoji technologického provedení finální konstrukce strojního zařízení.

Cílem této habilitační práce je podat systematický výklad, který se zabývá numerickým modelováním za účelem podpory výzkumu a vývoje rámců z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny. Jedná se o velmi složitý komplexní problém, který je multidisciplinární, pro jehož odpovídající vyřešení je nutné vytvářet a propojovat týmy a specialisty různých oborů a profesí a to, jak z akademické sféry, tak i z průmyslové sféry. V práci členěné do celkem pěti kapitol jsou uceleně přiblíženy a diskutovány simulace provedené za účelem podpory vývojového řešení rámců z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny, které jsou doplněny řadou literárních pramenů. Řešením práce vznikla ucelená databáze výsledků, která byla stanovena prostřednictvím experimentů, měření a pokročilých numerických simulací. Řešení práce také vedlo k vytvoření pokročilého robotizovaného pracoviště v laboratoři aplikované mechaniky a patentování výrobní technologie pro výrobu rámců z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny, včetně průmyslové licence.

Práce zároveň navazuje na problematiku diskutovanou v disertační práci autora o celosvětovém vývojovém trendu začleňování vlákenných kompozitních struktur do konstrukčních řešení strojních částí a přináší nové poznatky do komplexní vědecké problematiky konstrukce strojů a zařízení.

Autor

# Kapitola 1

## ÚVOD

Základním úkolem konstruktéra, projektanta, výpočtáře, technologa a obecně technika je vývoj, navrhování, inovace a optimalizace částí a mechanismů či celých systémů strojních zařízení za účelem zvyšování efektivity. To je spojeno s řešením celé řady specifických problémů. Samotným konstruováním vytváříme proces systémového řešení <sup>(1)</sup> vyhovující funkčním parametrům (např. pevnostním a deformačním podmínkám), kde účinné řešení vede k minimalizaci či maximalizaci těch faktorů, které ovlivňují efektivitu výsledného řešení (např. poddajnost, tuhost, spolehlivost, atd.). Hlavními parametry konstrukčních řešení, však v současné době není pouze statická a dynamická únosnost, pevnost a životnost ovlivněná mechanickými vlastnostmi, technologickými faktory (jakost, povrchové vlastnosti, vruby, svary, spoje) a zatěžujícími podmínkami (zatížení konstrukce, klimatické podmínky, teplota, koroze, atd.), či v neposlední řadě vibrace a hluk (uspořádání a uložení konstrukce). Hybným parametrem nových vyvíjených konstrukčních řešení strojních částí se především stává významná **redukce hmotnosti** a zároveň zvýšení podílu energeticky nenáročných materiálů nejlépe recyklovaných či recyklovatelných <sup>(2)</sup> při zachování stejných nebo lepších stávajících vlastností. Principem tohoto složitého komplexního problému je redukce hmotnosti všech částí a mechanismů tvořící finální konstrukci, tedy ať už se jedná o šroub či matici, spojku či ložisko, pohon výrobní linky nebo rámovou konstrukci nosné či nenosné části strojního zařízení. Vede to na cílené snižování energetické náročnosti použitých částí a materiálů při zachování požadované funkce zařízení. Tento trend nových **řešení strojních částí vede k vývoji konstrukcí z lehkých materiálových struktur** za účelem snížení dopadu na životní prostředí. Vychází to z celosvětové koncepce, která v současné době není již jen koncepcí výrobců dopravních prostředků na intenzivní snižování hmotnosti vedoucí ke snižování spotřeby paliva, snižování emisí (CO<sub>2</sub>), snižování spotřeby ropných produktů a naopak zvyšování ekologických parametrů. V současnosti se tento celosvětový trend obecně začíná požadovat od všech nových vyvíjených strojních částí, zařízení, produktů a také od zařízení vyrábějící tyto produkty. Evropská unie ve svých stanovách kladených na vývoj, výzkum a inovace uvádí, že studie a řešení

---

<sup>(1)</sup> Systémové řešení se stává pro konstruktéra optimalizační úlohou hledající ideální řešení z dané funkční množiny reálných řešení. Matematicky to můžeme formulovat jako nalezení takového cílového parametru  $\hat{\mathbf{p}} \in M$ , že pro hledaný parametr  $\mathbf{p} \in M$  platí  $f(\hat{\mathbf{p}}) \leq f(\mathbf{p})$ ,  $\forall \mathbf{p} \in M$ , kde  $f$  je cílová (kritériální) funkce a  $M$  je množina všech reálných řešení.

<sup>(2)</sup> V Evropské unii je to dáno především směrnicí 2000/53/ES [1], která mj. stanovuje od 1.1.2015 pro automobilový průmysl aplikaci jednotlivých konstrukčních částí automobilu z 85% recyklovatelných a z 95% recyklovaných produktů. Výrobci jsou však v nastoleném „zeleném trendu“ výrazně podporováni pomocí rámcových programových grantů Evropské unie jako jsou mj. programy FP7, RP7 - vývoj zaměřený na energeticky nenáročné materiály [2], či nové typy programových výzev jako je např. Horizon 2020, kde celková finanční podpora na vývojové aktivity pro jednotlivé výzvy dosahuje téměř 80 mld. eur.

prováděné za účelem vývoje nových pokročilých technologií a materiálů vedoucí ke konstrukčnímu řešení lehkých strojních částí, jako mohou být **kompozitní rámy**, bude následující řadu let významně podporovat. Jedná se tedy o cílenou inovaci, která by měla směřovat k snížení dopadů na životní prostředí a v neposlední řadě se tím dosáhne také nového estetického cítění. Obecně rámy či rámové konstrukce mají široké uplatnění ve všech technických oborech, jejichž využití je například pro konstrukční prvky jako jsou nosníkové části, příhradové konstrukce, stabilizátory, výztuhy, prvky lešení, podpěry, zábradlí, střešní konstrukce, nosné či nenosné části zařízení a strojů, atd. Rámy se navrhuje pro dané zatížení a podmínky od jednoduchých tvarů po složité prostorové geometrie s důrazem na pevnost, tuhost, štíhlost, stabilitu, variabilitu a nízkou hmotnost.

Tato práce se zabývá vybraným popisem numerických simulací, které se provedly za účelem **výzkumu a vývoje konstrukce lehkého prostorového rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny**, což si vyžádalo řady experimentů, měření a vytvoření pokročilých numerických simulací.

V patřičné míře bude v práci diskutován fakt, že se jedná o komplexní problém alternativní náhrady současných rámu, pro jehož vyřešení se musely provést rozsáhlé studie a analýzy mechanických vlastností zkušebních vzorků i celých rámu vytvořených z kompozitních materiálových struktur, jak bylo autorem publikováno např. [27], [28], [37], [38], [44], [54], [57], [58], [61] a [63].

Výzkumy uváděné v této práci zahrnovaly mezioborové propojení nejen pro studii a optimalizaci mechanických vlastností vyvíjených vzorků, ale i pro optimalizaci nového vývojového řešení prototypové technologie, která by umožňovala v laboratorních podmínkách vyrábět rámy a rámové konstrukce případně další strojní části (nosníky, pruty, spojky, potrubí, atd.) z kompozitní materiálové struktury. Také toto mezioborové propojení přispělo k prohloubení spolupráce mezi akademickou a průmyslovou sférou na konkrétním konstrukčním řešení. Řešení práce také umožnilo získat nové poznatky a informace zvyšující konkurenceschopnost pro spolupráci v národních i mezinárodních projektových žádostech.

V neposlední řadě studie a výzkumy uváděné v této práci vedly k rozšíření a modernizaci laboratoře aplikované mechaniky Technické univerzity v Liberci a přispěly k zvýšení kvalifikace a odbornosti zejména doktorandů a členů katedry částí a mechanismů strojů, Fakulty strojní, Technické univerzity v Liberci.

## 1.1 Cíle habilitační práce

Práce si klade za hlavní cíl uceleně přiblížit systematický výklad provedených výzkumů a studií s využitím pokročilého numerického modelování, které přispěly **k návrhu a optimalizaci vývojového řešení konstrukce rámu z kompozitní materiálové struktury vyztužené dlouhými vlákny**.

Protože předkládaná habilitační práce nemůže vzhledem k rozsahu zahrnout celou řešenou problematiku a ani si neklade za cíl být vyčerpávajícím přehledem všech experimentů a numerických simulací, které se provedly (některé jsou také vázány smlouvami o utajení), byly proto pro práci vybrány pouze některé podstatné části vedoucí k cíli habilitační práce, které lze rozdělit do dílčích cílů.

Dílčí cíle tvoří ucelené výklady výzkumných aktivit řešené problematiky, přičemž jsou rozdělené do jednotlivých kapitol a podkapitol a lze je formulovat takto:

- **Analýza mechanických vlastností vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny**
  - Studie, analýzy a měření vybraných vzorků
    - Provedení studií a analýz struktury vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny.
    - Popis mechanických vlastností vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny.
    - Měření mechanických vlastností vzorků vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny.
  - Analytické a numerické modely pro studii mechanických vlastností vzorků vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny
    - Matematicko-fyzikální popis modelů pro studii mechanických vlastností vzorků vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny jako jsou: fenomenologické modely, semi-empirické a homogenizované modely, ze kterých lze získat mj. neznámé elastické konstanty  $E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{23}$  kompozitního vzorku.
    - Sestavení numerických simulací v prostředí MKP vybraných vzorků pro posouzení mechanických vlastností vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny, tj. rozložení deformace a hlavních napětí ve struktuře, což je důležité nejen pro studii chování materiálu, ale také pro vytvoření materiálového modelu využitelného pro optimalizace rámu.
    - Pomocí numerických simulací porovnat vyhodnocené mechanické vlastnosti s analytickými modely a měřením.
- **Konstrukce a optimalizace rámu vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny**
  - Problematika konstrukčního řešení rámu vyvíjených z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny
    - Úvod do problematiky rámu vyvíjených z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny.
  - Konstrukční řešení navíjení vláken na profilovou geometrii jádra rámu
    - Navrhnutí konstrukčních možností a principů technologie navíjení vláken mechanickým i automatickým způsobem v laboratorních podmínkách.
  - Numerické modelování pro podporu optimalizace konstrukčního řešení rámu z vyvíjené kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny
    - Vytvoření MKP modelů rámu vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny pro studii a optimalizaci mechanických vlastností.
    - Stanovení optimálního úhlu kladení vláken na jádro rámu pro optimalizaci pevnosti a tuhosti pro dané zatížení.
    - Shrnutí poznatků z numerických modelů rámových konstrukcí vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny.

- Porovnání modelových simulací s experimentálními výsledky vyrobených rámu z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny
  - o Vytvoření MKP modelů rámu vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny pro studii a optimalizaci mechanických vlastností.
- **Příkladová studie aplikace vývojového řešení rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny**
  - Vybraná ukázka příkladové spolupráce na vývojovém řešení rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny, s využitím numerické simulace.

## Kapitola 2

# ANALÝZA MECHANICKÝCH VLASTNOSTÍ VZORKŮ Z KOMPOZITNÍCH STRUKTUR VYZTUŽENÝCH DLOUHÝMI VLÁKNY

Tato kapitola se zabývá studii mechanických vlastností vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny, které bylo důležité provést za účelem získání vstupních informací a znalostí, které by přispěly k vývojovému řešení rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny. Nejprve je přiblížena základní problematika studie kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny a obecně kompozitů s uvedením parametrů, které by vedly k optimalizaci mechanických vlastností vzhledem k odpovídající pevnosti. Dále jsou uvedeny možnosti a způsoby měření kompozitních vzorků vyztužených uhlíkovými a skleněnými vlákny. Následuje uvedení analytických modelů pro popis příčně izotropního kompozitu, kde tyto matematické vztahy umožňují stanovovat neznámé elastické konstanty a zároveň jsou důležité pro verifikaci numerických modelů. Závěrem je rozsáhleji přiblížena problematika vytvoření pokročilého numerického modelu vzorku kompozitní vlákenné struktury pro stanovení mechanických vlastností, a to jak prostřednictvím popisu obecného kontinua, tak komplexnějšího numerického modelu se strukturním uspořádáním umožňující přiblížit také vzájemnou interakci vlákna a matrice.

## 2.1 Studie a analýzy vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny

Studie a analýzy mechanických vlastností testovacích vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny poskytují důležité informace pro budoucí návrh rámu vyvíjeného z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny. Nejprve je důležité přiblížit problematiku a specifika kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny prostřednictvím, kterých by bylo možné zvýšit pevnost a houževnatost výsledné konstrukce. Kompozitní struktura vyztužená dlouhými vlákny je zpravidla vytvořena z dvou dominantních složek tj. nosné vlákenné výztuže a křehké či viskózní matrice. V konstrukčním provedení finálního kompozitu (spojení vláken s matricí) lze v ideálním případě získat odpovídající synergií vysoké specifické vlastnosti (vysokou pevnost, tuhost, houževnatost), kterých nedosahuje ani jedna ze vstupních složek. Jedná se o to, že optimální synergický účinek je charakterizován známým „nelogickým“ pravidlem  $2 + 3 = 7$ , které charakterizuje, že součtem vlastností jednotlivých vstupních složek (vlákna + matrice) se dosáhne vyšší hodnoty specifických vlastností nové vzniklé struktury. Obecně nejvyšších specifických vlastností lze dosáhnout, jsou-li vlákna silově namáhána až do meze pevnosti  $\sigma_M^f \Big|_{F^f \rightarrow \max}$  působícím napětím přeneseným matricí.

Samotná matrice transformuje nejen přenos napětí do vláken, jak bude dále diskutováno, ale jedná se také o činitel samotného vazebního spojení vláken. Tedy matrice je složkou kompozitu pro spojení a vytvoření odpovídající finální struktury, kterou zároveň chrání před povrchovým opotřebením a poškozením, které by vedlo ke ztrátě stability a pevnosti

výsledného kompozitu. Výzkumem a studiem kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny se vzhledem k jejich potenciálu a specifickým vlastnostem zabývala celá řada autorů jako např. Agarwal, Broutman a Chandrashekhara [3], Guedes [4], Gay a Gambelin [5], Reifsnider [6], Teply a Reddy [59], Barthelot [60], Gibson [65], či Soden, Hinton a Kaddour [66]. Vesměs se autoři shodují, že kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny jsou jedinečné materiály, jejichž mechanické vlastnosti obecně nelze uceleně analyticky, ani experimentálně popsat. Také teorie se rozcházejí v matematických vztazích odvozených pro kompozitní struktury s jednosměrným uspořádáním, natož aby bylo možné vytvořit ucelené syntézy mechanických vlastností pro geometricky složité konstrukční útvary rámu s vícesměrným vlákenným uspořádáním. Je to dáno tím, že jejich vlastnosti se významně liší s daným typem vlákna a matrice (mj. fyzikální a mechanické vlastnosti, povrchové úpravy, chemické složení, vazební činitelé, hustota, teplotní roztažnost, atd.), neboť jen nepatrnou změnou vznikají různé kombinace s řádově rozdílnými vlastnostmi v mechanickém chování <sup>(3)</sup>. Obecně kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny můžeme z hlediska fyzikálních a mechanických vlastností považovat za nehomogenní a heterogenní struktury s anizotropními vlastnostmi. Jejich heterogenost se projevuje velkým množstvím kombinací různých variant výsledných konstrukčních materiálů vhodných či nevhodných pro dané specifické konstrukční požadavky a zatížení <sup>(4)</sup>. Strukturní chování vláken a matrice v kompozitu při velkém poměru povrchu k objemu si vzhledem k maximalizaci požadované pevnosti vyžaduje dosažení kontinuální soudržnosti tj. bez výrobních chyb a vad. Pro výběr vlákenné výztuže se nabízí široké spektrum vláken, které je stále vyvíjeno a rozšiřováno. Pro konstrukční aplikace do rámu využitelných ve strojních částech a zařízení mohou být využity prakticky libovolná organická přírodní vlákna (např. kokosová, bavlněná, celulosová vlákna, atd.), polykrystalická z různých keramických materiálů, polymerní vlákna, skleněná či uhlíková vlákna. V této práci byla pro podporu vývojového řešení rámové konstrukce z kompozitní struktury studována zejména uhlíková a skleněná vlákna <sup>(5)</sup>, jejichž prameny <sup>(6)</sup> jsou uvedeny na obr. 2.1.1. Výrobní technologii těchto vláken dobře popisuje např. Bareš [7]. Uhlíková vlákna jsou průmyslově vyráběná prostřednictvím různých způsobů např. karbonizací organických vláken nebo pyrolýzou v průměru 5 – 12  $\mu\text{m}$ . Je obecně známo, že samotný uhlík může existovat v přírodě ve třech formách: diamantové, grafitové a skelné (amorfní). Za uhlíková vlákna lze považovat vlákna, která vzniknou při teplotě 800 – 1600°C, přičemž grafitová vlákna jsou vyráběná při teplotě  $T > 2\,200^\circ\text{C}$ . Však pouze vlákna získaná z krystalické formy uhlíku uspořádané v určitém směru

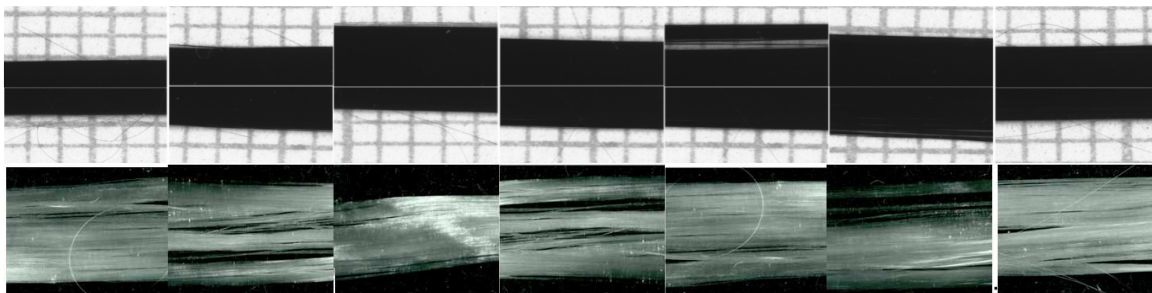
<sup>(3)</sup> Lze to uvést na příkladu, který uvádí Bareš [7]. Pouhou kombinací 3 homogenních izotropních lehkých kovů, ze kterých vznikne ternární litina se získá 82 160 možných variant slitin, přičemž kdybychom zkombinovali 6 kovů lze získat již více než 300 milionů různých variant slitin. S kompozitní strukturou vyztuženou dlouhými vlákny je to obdobné, kde jen změna matrice, směrové uspořádání a typ vlákna významně ovlivní výsledné mechanické vlastnosti, neboť vzniká úplně jiná struktura (Gay a Hoa [8]).

<sup>(4)</sup> Pro přenos statického napětí působícího na kompozit do vláken je vyžadována co nejlepší soudržnost vláken a matrice, což neplatí např. v případě dynamické rázové zkoušky simulující náraz. Je to dáno tím, že u rázové pevnosti je nutno zajistit absorpci energie přednostně rozvojem trhliny podél povrchu vláken.

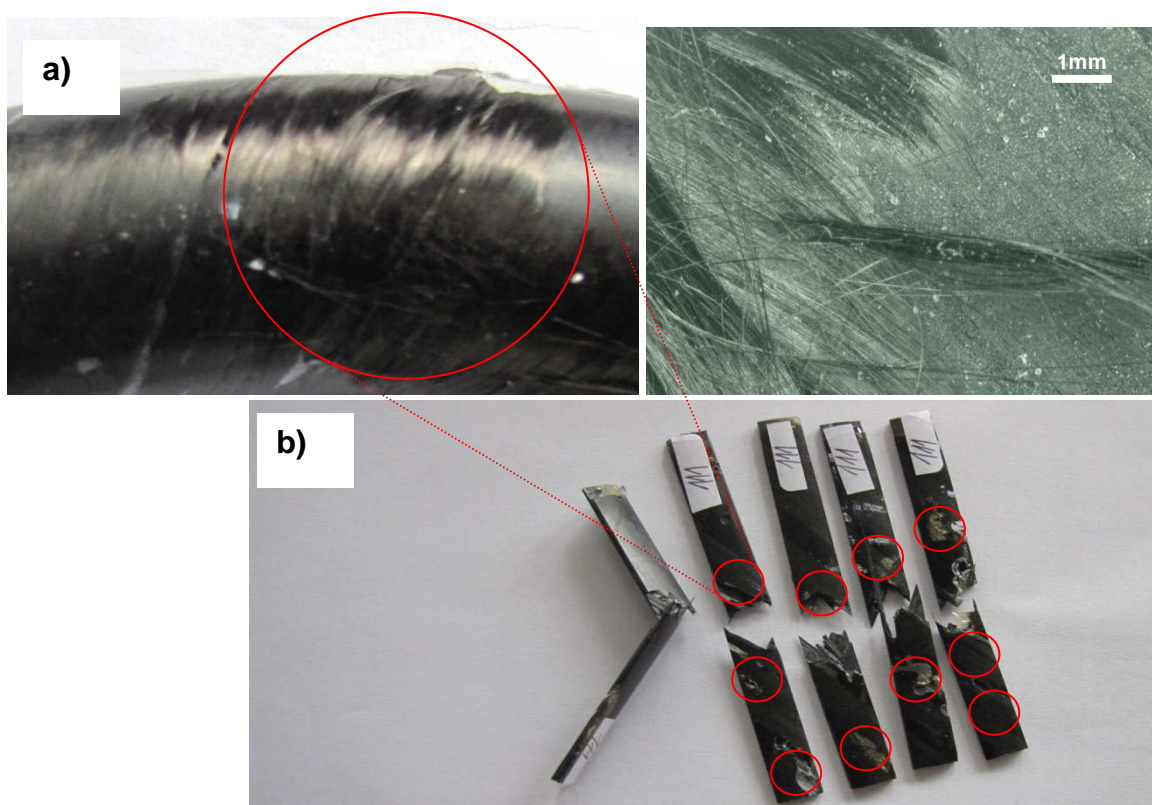
<sup>(5)</sup> Pozn. Byly testovány i jiná vlákna, zejména recyklovaná textilní vlákna vzhledem k jejich velmi nízké ceně a dostupnosti. Jejich problém pro aplikaci do konstrukčního řešení rámové konstrukce je v tom, že v současné době nedosahují požadovaných mechanických vlastností a dalších specifických vlastností jako např. uhlíková vlákna, případně skleněná vlákna.

<sup>(6)</sup> Pozn. Pramenec je svazek vláken (fibril), který je tvořený více jak 50 vlákny, přičemž seskupení pramenů vytváří provazce (roving), který je definován buď počtem pramenů, nebo počtem metrů vláken na 1 kg. Příkladem lze uvést 60 pramencový roving, který přibližně má 451  $\text{m.kg}^{-1}$ .

(výroba pod tahovým napětím) mají vysoký modul pružnosti a další specifické konstrukční parametry jako např. nižší hustotu, větší povrch, nižší tepelnou vodivost, vyšší elektrický odpor atd. oproti grafitovým vláknům. Skleněná vlákna se vyrábějí rychlým tažením z taveniny (rychlost dosahuje  $400 \text{ m.min}^{-1}$ ) v průměru  $3,5 - 20 \text{ }\mu\text{m}$ , přičemž rychlost zvlákňování ovlivňuje viskozita ( $50$  až  $100 \text{ Pa.s}$ ), teplota a samozřejmě chemické složení skla.



**Obr. 2.1.1.** Vybrané vzorky pramence vláken: uhlíková vlákna (nahore), skleněná vlákna (dole).



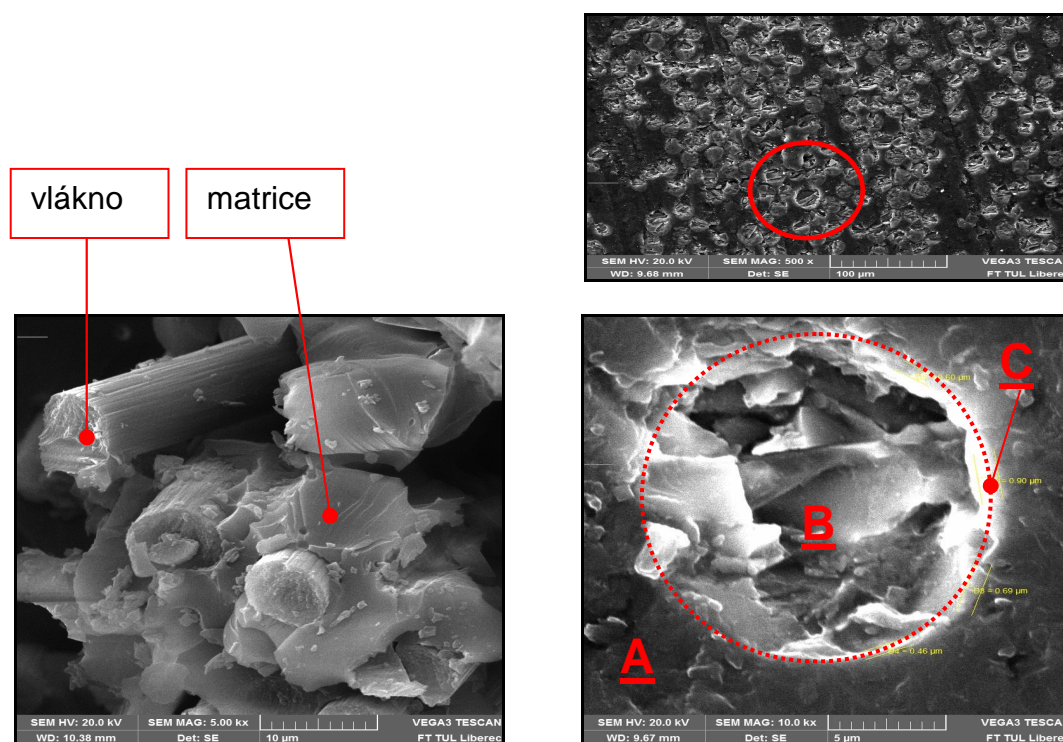
**Obr. 2.1.2.** Minimalizace pevnosti vzorku vlákenné kompozitní struktury vlivem nespojení matrice s vlákny: a) nesmočená vlákna s matricí (vlevo), detail (vpravo), b) oblasti vzniklé neodpovídajícím propojením vlákna s matricí (červené označení).

Matrice, která ovlivňuje vlastnosti a využitelnost výsledného kompozitu byla pro vzorky i konstrukční řešení vývojového rámu využita epoxidová <sup>(7)</sup>. Výrobou může docházet

<sup>(7)</sup> Volba matrice v první řadě záleží na typu a vlastnostech vlákenné výztuže, kde hrají roli chemické a fyzikální parametry (smáčivost, houževnatost, průměr a druh vláken, teplotní



k nedokonalému propojení vláken s matricí (např. nízká smáčivost vlákenné výztuže v matrici, vytvoření bublinek, atd.), což vede k mechanickým vadám výsledné kompozitní struktury, které často přerůstají do kritických chyb a významnému snížení pevnosti, jak je příkladově uvedeno na obr. 2.1.2. Výslednou pevnost kompozitní struktury ovlivňují mechanické vlastnosti zvolené vlákenné výztuže a matrice, které jsou charakterizovány mechanickými parametry tj. modulem pružnosti, Poissonovým číslem, popřípadě dalšími parametry jako jsou creepové a lomové vlastnosti jednotlivých složek. Významnou (ne-li největší) pozornost z hlediska pevnosti je důležité ve výzkumech věnovat také studiím mezifázového rozhraní – rozhraní mezi vlákny a matricí<sup>(8)</sup>, které je uvedeno na obr. 2.1.3. Je to dáno tím, že charakteristické vlastnosti mezifázového rozhraní vytvářejí mechanismus, který zřejmě způsobuje synergický efekt, kterým získává výsledná konstrukce z kompozitní struktury své jedinečné mechanické vlastnosti. Přesto, že byly sestaveny řady teorií, tak stále mechanismus synergického působení mezifázového rozhraní není dodnes zcela jasný.



**Obr. 2.1.3** Řez vzorkem kompozitní struktury s dlouhými vlákny v řezu (nahore), detail: vlákno – matrice (dole vlevo), detail: mezifázové rozhraní (dole vpravo).

vlastnosti, atd.), proto se využívají kovové matrice, skleněné a keramické matrice, polymerní matrice (rektoplastické a termoplastické), polyuretanové matrice, atd.

<sup>(8)</sup> Mezifázové rozhraní vytváří ve spojení vláken s matricí „úplně jinou strukturu“ a lze tedy uvádět, že se jedná o třetí složku kompozitu, která se smícháním vláken s matricí vytvořila. Zřejmě se jedná o činitel, který vytváří synergický efekt. Mezifázové rozhraní je složka, která podmiňuje stupeň kontaktu a síly působící mezi vláknem a matricí. Kompozitní strukturu vyztuženou vlákny tvoří tedy tři složky vytvářející fáze **A** (matrice), **B** (vlákno), **C** mezifázové rozhraní, které dále může být rozšířeno do podfází  $C_1$  a  $C_2$  (vytvářející dodatečné podfáze  $C_{11,111}, \dots, 1N, C_{21,211}, \dots, 2n$ ), jejichž chování neodpovídá složkám **A** nebo **B**, což může být popsáno jako kompozitní efekt.

## 2.2 Mechanické vlastnosti vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny

Mechanické vlastnosti vzorků vyvíjených z kompozitních struktur s dlouhými vlákny, resp. obecně vzorků z vlákenných kompozitních struktur jsou ovlivněny geometrickým uspořádáním (směrové uspořádání vláken, množství a typ vlákenné výtzuže a matrice), fyzikálními a chemickými vlastnostmi, výsledným spojením „vlákno – matrice“, čímž se vytvoří základní strukturní uspořádání konstrukce vlákenného kompozitu. Mechanické vlastnosti takovýchto struktur jsou proto ovlivněny způsobem přípravy a výroby, druhem vláken a jejich povrchovou úpravou a také specifickými vlastnostmi použité matrice, jak bylo přiblíženo v kap. 2.1. Je důležité si uvědomit, že konstrukce vytvořená z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny se nepřipravuje pro všeobecné použití, ale měla by se navrhovat tak, aby byla využita její největší potenciální účinnost pro dané zatížení (druh a typ zatížení, charakteristické podmínky a oblast použití). Je to dáno tím, že rozdílné složení včetně rozdílného geometrického uspořádání vláken a matrice, průměr vláken vedoucí k odpovídajícímu smíšení, bude vyžadovat konstrukce, která bude staticky nebo dynamicky namáhaná konstantním nebo kombinovaným zatížením, za nižších nebo vyšších teplot, ve vlhkém či suchém prostředí, atd. Proto je důležité již při vývoji konstrukčního řešení vycházet z těchto předpokladů, které povedou k dosažení potřebné statické i dynamické únosnosti. Vstupní složky vzorku vlákenné kompozitní struktury, tedy vlákno či matrice, vykazují odlišné mechanické i specifické vlastnosti <sup>(9)</sup>. Tyto strukturní vlastnosti charakterizují homogenitu nebo nehomogenitu výsledné kompozitní struktury, která může mít izotropní nebo anizotropní vlastnosti.

### 2.2.1 Izotropní a anizotropní vlastnosti vzorků z vlákenných kompozitních struktur

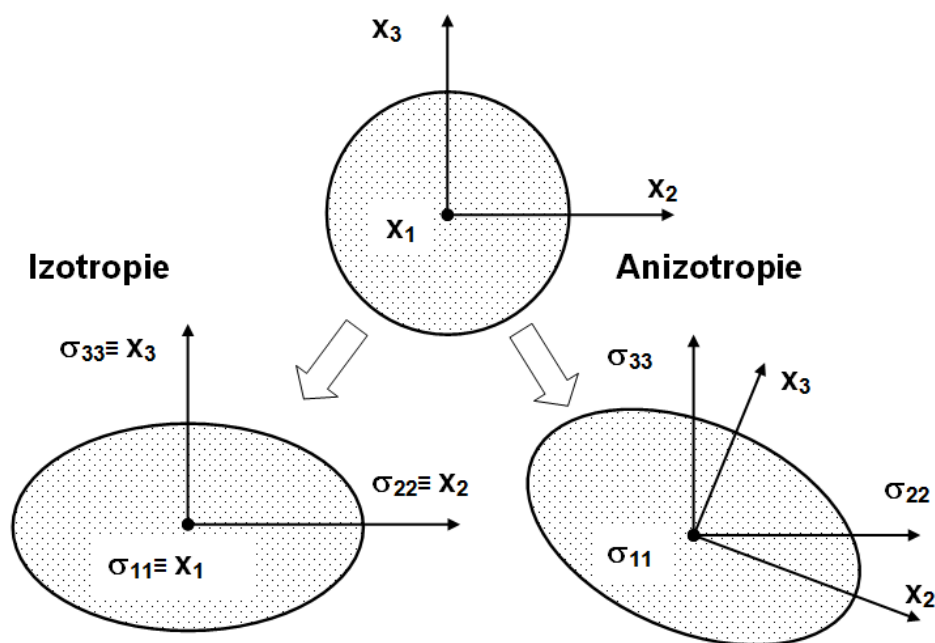
Pro studie a analýzy mechanických vlastností konstrukcí navržených z vlákenných kompozitních struktur, které můžeme považovat za obecně poddajná tělesa pod zatížením, je nutné zavést následující předpoklady důležité pro pochopení problému:

- zavedeme-li hypotézu přetvoření „malé koule“ představující poddajné těleso pod zatížením, tak se z koule stává přetvořením elipsoid (obr. 2.2.1),
- předmětem studie mechanických vlastností je napětí a deformace popř. tuhost, poddajnost, silové a tahové vlastnosti, atd.,
- každý bod tělesa bude identifikován hlavními osami, v jejichž normálových směrech působí hlavní (normálová) napětí.

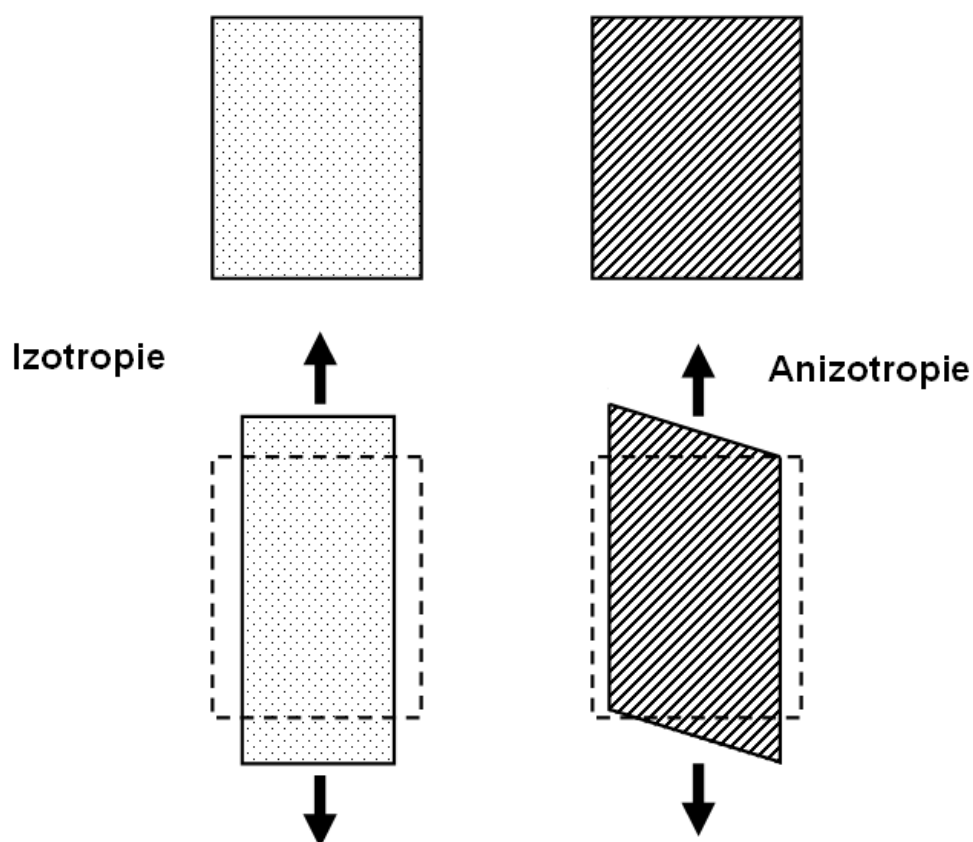
Po zavedení uvedených předpokladů bude pro izotropní vlastnosti následně platit, že hlavní napětí  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  jsou ve směrech hlavních os  $x_i = x_1, x_2, x_3$  deformovaného

<sup>(9)</sup> Základní požadavky jsou např. vlákna s vyšším bodem tání než matrice, matrice s nižším modulem pružnosti, ale s vyšším mezním přetvořením, podobné jsou creepové vlastnosti vlákna i matrice, přenos napětí z matrice s vysokou tuhostí do poddajnějších vláken, ovlivňovat chemické reakce mezi vláknem a maticí apod.

tělesa. Pro anizotropní chování budou napětí nejen ve směrech hlavních os, ale hlavní napětí mohou být v jiných směrech, než v hlavních osách (obr. 2.2.1 a obr. 2.2.2).



**Obr. 2.2.1.** Hypotéza přetvoření malé koule pro izotropní a anizotropní chování tělesa.



**Obr. 2.2.2.** Porovnání deformace vlákenné kompozitní struktury s izotropními a anizotropními vlastnostmi při tahové zkoušce.

Izotropní vlastnosti lze obecně popsat pro plošné útvary základní konstitutivní rovnicí zobecněného Hookova zákona vyjadřující závislost napětí – přetvoření podle vztahu (2.2.1). Tyto vlastnosti jsou charakteristické pro matrice a také pro některé typy vláknenných výztuží např. velmi používaná skleněná vlákna nebo kovová vlákna lze považovat za složky s izotropními vlastnostmi.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.2.1)$$

kde  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  je přetvoření v hlavních osách rovinného souřadného systému  $x_1, x_2$ , kde  $11 = x_1$ ,  $22 = x_2$ ,  $\gamma_{12}$  vyjadřuje, zkso k rovině  $x_1 x_2$  <sup>(10)</sup>,  $E$  je Youngův modul pružnosti v tahu,  $G$  je smykový modul,  $\nu$  je Poissonovo číslo,  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  je napětí v hlavních osách  $11 = x_1$ ,  $22 = x_2$ ,  $\tau_{12}$  je smykové napětí k osám  $x_1, x_2$ .

Z rovnice (2.2.1) vychází neznámé 3 konstanty  $E, G, \nu$  resp. jen dvě  $E, \nu$  zavedeme-li vztah (2.2.2) platící pro smykový modul  $G$  izotropního materiálu.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.2.2)$$

Anizotropní vlastnosti, které jsou charakteristické např. pro uhlíková a aramidová vlákna <sup>(11)</sup> lze popsat úpravou (2.2.1) podle vztahu (2.2.3).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{21}/E_{22} & 0 \\ -\nu_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.2.3)$$

kde  $E_{11}, E_{22}$  je podélný a příčný modul pružnosti,  $G_{12}$  je smykový modul v rovině  $x_1, x_2$ ,  $\nu_{12}, \nu_{21}$  jsou Poissonova čísla, přičemž platí  $\nu_{12} \neq \nu_{21}$ .

Z rovnice (2.2.3) vychází 5 neznámých konstant  $E_{11}, E_{22}, \nu_{12}, \nu_{21}, G_{12}$  resp. 4 konstanty  $E_{11}, E_{22}, \nu_{21}, G_{12}$ , neboť platí relace daná vztahem (2.2.4), kterým lze vyjádřit Poissonovo číslo  $\nu_{21}$  anizotropního materiálu.

<sup>(10)</sup> V rovnici (2.2.1) vyjadřují  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}$  přetvoření pro malé deformace, takže pro posuvy do jednotlivých směrů  $u_i$  platí:  $u_{11} = u_x$  a  $u_{22} = u_y$ , pak tedy  $\varepsilon_{11} = \partial u_{11} / \partial x_{11}$ ,  $\varepsilon_{22} = \partial u_{22} / \partial x_{22}$ ,  $\gamma_{12} = \partial u_{11} / \partial x_{22} + \partial u_{22} / \partial x_{11}$ .

<sup>(11)</sup> Jak bylo přiblíženo již v kap. 2.1, je řada různých druhů vláknenných výztuží. Hlavní význam využití daného typu vláknenné výztuže pro konstrukční aplikaci je nejen v mechanických vlastnostech, měrné hmotnosti, technologické zpracovatelnosti, ale také je to v současné době ovlivněno cenou.

$$\frac{V_{12}}{E_{11}} = \frac{V_{21}}{E_{22}} \Rightarrow \nu_{21} = \frac{V_{12}}{E_{11}} \cdot E_{22}. \quad (2.2.4)$$

## 2.2.2 Charakteristické fyzikální vlastnosti vzorků z vláknenných kompozitních struktur

Charakteristické fyzikální vlastnosti vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny jsou ovlivněné hmotnostními a objemovými poměry jednotlivých vstupních složek (vláknenné výztuže a matrice), které výsledně ovlivňují konstrukční parametry (ovlivnění mechanických vlastností a hmotnosti konstrukce). Hmotnostní a objemové množství vláken a matrice ve vzorku z kompozitní struktury lze definovat podle následujících vztahů (2.2.5 – 2.2.9)

$$m^c = m^f + m^m, \quad (2.2.5)$$

$$M^f = \frac{m^f}{m^c}, \quad M^m = \frac{m^m}{m^c}, \quad (2.2.6)$$

$$M^f = 1 - M^m, \quad (2.2.7)$$

$$V^f = \frac{v^f}{v^c}, \quad V^m = \frac{v^m}{v^c}, \quad (2.2.8)$$

$$V^f = 1 - V^m, \quad (2.2.9)$$

kde  $m^c$  je celková hmotnost kompozitní struktury,  $m^f, m^m$  je hmotnost vláken a matrice,  $M^f, M^m$  je hmotnostní množství vláken a matrice,  $V^f, V^m$  je objemové množství vláken a matrice,  $v^c$  je celkový objem kompozitní struktury,  $v^f, v^m$  objem vláken a matrice.

Objemové množství vláken  $V^f$  a matrice  $V^m$  lze také vyjádřit prostřednictvím měrné hmotnosti vláken  $\rho^f$  a měrné hmotnosti matrice  $\rho^m$ , neboť platí vztah (2. 2. 10). Celková měrná hmotnost  $\rho^c = m^c / v^c$  lze následně vyjádřit jako součet složek výztuže a matrice (2. 2. 11). Charakteristickou tloušťkou kompozitní struktury  $h$ , můžeme následně vyjádřit podle vztahu (2. 2. 12).

$$V^f = \frac{M^f / \rho^f}{M^f / \rho^f + M^m / \rho^m}, \quad M^f = \frac{V^f \rho^f}{V^f \rho^f + V^m \rho^m}, \quad (2.2.10)$$

$$\rho^c = \rho^f V^f + \rho^m V^m, \quad (2.2.11)$$

$$h = m^f \left[ \frac{1}{\rho^f} + \frac{1}{\rho^m} \cdot \left( \frac{1 - M^f}{M^f} \right) \right]. \quad (2.2.12)$$

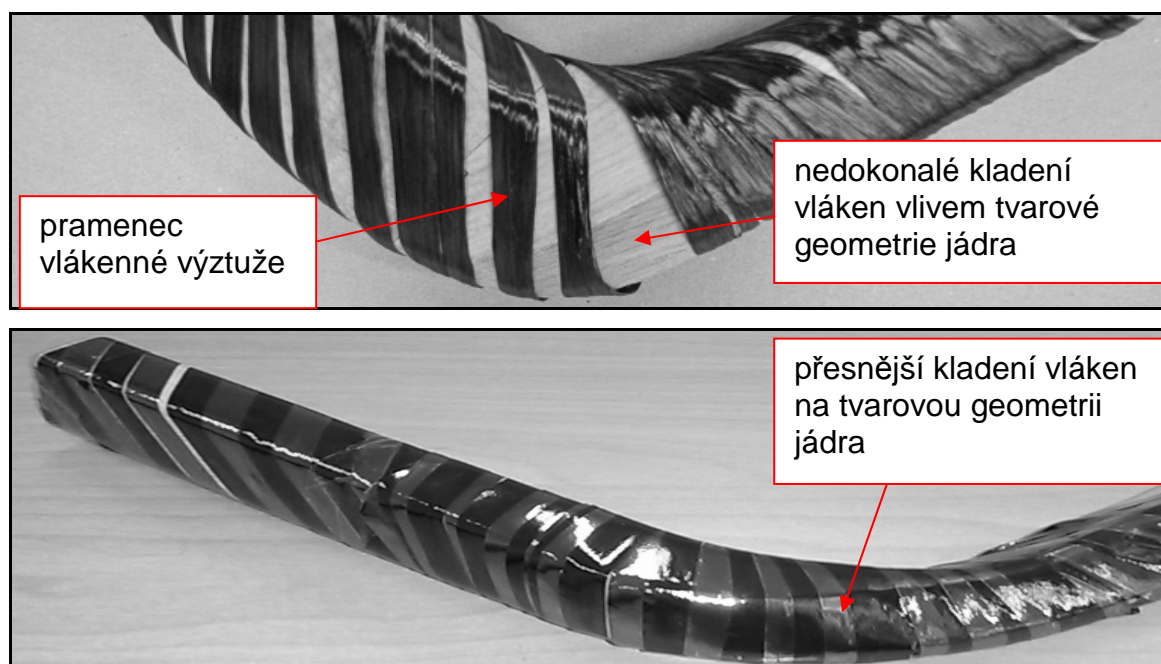
Gay a Hoa [8] uvádí, že při navíjení vláken na tvarované geometrie se může docílit objemového podílu vláken v kompozitu přibližně v rozmezí maximálně 55% – 80% z celkového objemu kompozitní struktury. Tyto hodnoty by bylo v ideálním případě ještě možné zvýšit přesným kladením vláknenných pramenců vedle sebe (obr. 2.2.3). Limitního tedy 100% stavu objemového zaplnění vlákny nelze však docílit vzhledem k propojení s maticí. Také dokonale přesným kladením vláknenných pramenců budou mít samotné

pramence vždy určitou hodnotu zaplnění, která nebude geometrickým uspořádáním nikdy rovna 1. Musí se však uvést, že optimální poměr vlákenné výztuže je vůči synergickému efektu rozmezí  $V^f \approx 0,4 \div 0,65$ . Jak vybrané fyzikální parametry přispívají k ovlivnění geometrického parametru  $h$  některých testovaných vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny pro názorné porovnání uvádí tab. 2.2.1. Tyto parametry lze následně využít při vytváření numerických modelů. Další vstupní parametry, které jsou nutné pro sestavení numerických modelů, se musí získat měřením na testovaných vzorcích.

**Tab. 2.2.1.** Fyzikální a geometrické parametry vybraných vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny

Výrobní označení vláken	$m^f$ * [gm <sup>-2</sup> ]	$m^m$ * [gm <sup>-2</sup> ]	$M^f$ [%]	$M^v$ [%]	$V^f$ [%]	$V^m$ [%]	$\rho^f$ [gcm <sup>-3</sup> ]	$\rho^m$ [gcm <sup>-3</sup> ]	$h$ [mm]
GF 1600 tex/PUR Huntsman	560	600	48	52	30	70	2,45	1,1	1,2
CFprepreg HEXPLY- M10R	150	91,96	62	38	52	48	1,8	1,2	0,22
CF 24K/PUR Huntsman	213	747	22	78	15	85	1,8	1,1	1,2

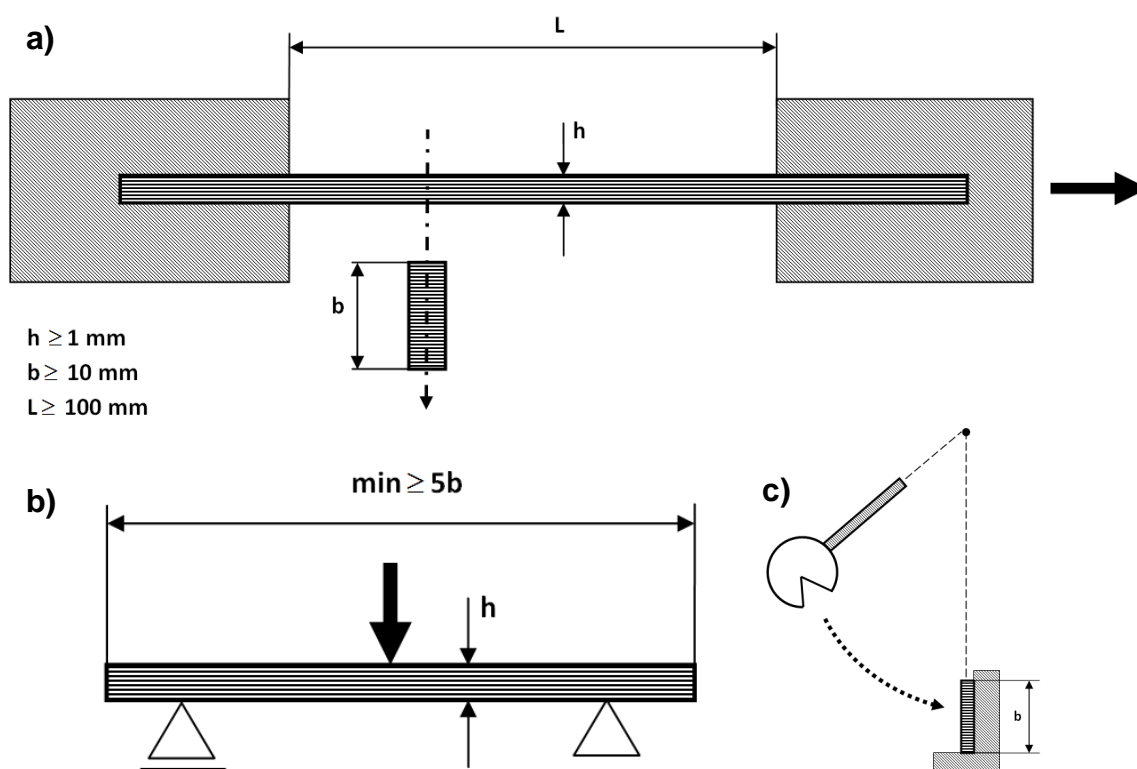
Pozn.  $m^f$  \*,  $m^m$  \* jsou plošné hmotnosti, které dávají celkovou plošnou hmotnost  $m^c$  \* vzorku kompozitu.



**Obr. 2.2.3.** Příklad objemového zaplnění vlákny ovinutého vzorku jádra tvarové geometrie rámové konstrukce.

## 2.3 Měření mechanických vlastností vzorků vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny

Pro stanovení neznámých parametrů, které potřebujeme získat jako vstupní hodnoty pro numerické simulace, je nutné provést měření na experimentálních vzorcích. Pro ucelenost vstupních dat je důležité provést měření na vzorcích, jak samotné vlákenné výztuže (vlákenných pramenců), samotné matrice, tak výsledné kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny (vlákna spojená matrice). Měření mechanických vlastností vzorků se provádí podle standardních laboratorních zkoušek, které se dělí podle časového průběhu působícího zatížení. Rozlišujeme je na statické a dynamické zkoušky. Lze tak provádět zkoušku v tahu při konstantním či cyklickém zatěžování vzorku, tříbodovém ohybu, Charpyho testu, jak je přibliženo na obr. 2.3.1. Vzorky mohou být vytvořeny v plošném tvaru „psí kosti“ nebo případně v plošném tvaru obdélníku s definovanou délkou  $L$ , šířkou  $b$  a tloušťkou  $h$ <sup>(12)</sup>, přičemž se mohou testovat pro krátkodobé či dlouhodobé měření.



**Obr. 2.3.1.** Měření mechanických vlastností vzorků kompozitních struktur: a) tahová zkouška, b) tříbodový ohyb, c) Charpyho kladivo.

<sup>(12)</sup> Pozn. geometrické rozměry  $h, b, L$  mohou být v některých konstrukčních aplikacích i menší, problém však může nastat s provedením měření resp. uchycením vzorku do čelistí trhačského zařízení.



Pro následné verifikace numerických simulací je důležitá znalost zejména tahových vlastností testovaných vzorků, které můžeme určit prostřednictvím normované zkoušky odpovídající měření pevnosti a tažnosti plastů podle *DIN EN ISO 527-4:1997-07 resp. ČSN EN ISO 527-1 (640604) Plasty - Stanovení tahových vlastností - Část 1: Základní Principy* <sup>(13)</sup>. Používá se k určení  $E$  a  $G$  – modulu v podélném i příčném směru, meze pevnosti, meze kluzu, tažnosti, případně kontrakce. Testované vzorky vláknenných pramenců byly vytvořeny ručním kladením z uhlíkových a skleněných vláken ve formě rovingů, které byly podélně uloženy (úhel směru kladení vláken = 0°) do papírových úchyťů, aby se vlákna netřepila a zároveň byla uspořádána ve směru tahového namáhání. Testované vzorky izotropní matrice byly vytvořeny z formy pro vzorky, do které byla matrice zalita. K výrobě testovaných vzorků matrice i vzorků finálních rovinných kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny byla použita epoxidová matrice <sup>(14)</sup>, <sup>(15)</sup>. Vzorky kompozitních struktur byly testovány s různým kladením vláken a to jak v podélném směru pro stanovení  $E_{11}$ , tak v příčném směru pro stanovení  $E_{22}$  a také pod úhlem 45° pro stanovení  $G_{12}$ . Jednotlivé vzorky byly upnuty do čelistí zkušebního zařízení TIRA TEST 2300. Obecně lze pro testování kompozitů využít „jakékoliv trhačky“, jen je nutné, aby trhací zařízení umožňovalo provést měření pro různé druhy vzorků. Toho lze docílit pomocí vhodně navržených čelistí a umožnilo dosáhnout požadované tahové síly. V případě velmi pevných vzorků kompozitů se jeví jako nejvhodnější hydraulicky dotahované čelisti. Je to dáno tím, že hydraulické čelisti jsou schopny vytvořit dostatečný tlak, aby vzorky během zkoušení nemohly v čelistech prokluzovat. Vzorky byly vytvořeny o délce 150 mm s trhací délkou  $L = 100\text{ mm}$ , šířkou  $b = 20\text{ mm}$  s průměrnou tloušťkou  $h = 1\text{ mm}$  pro vláknenné pramence a matrici,  $h = 1,7 \pm 0,3\text{ mm}$  pro vzorky kompozitní struktury v závislosti na odlišném zaplnění vláken  $V^f$ . Vzorek se vždy upnul do čelistí, tak aby byla upínací délka vzorku 100 mm. Rychlost zatěžování byla 2 mm/min až do okamžiku, než dojde k poklesu maximální naměřené síly o 90%, což indikuje porušení vzorku. Na vzorek byl vždy umístěn axiální extenzometr (průtahoměr) <sup>(16)</sup>. Data z měření byla v podobě textového souboru

<sup>(13)</sup> V rámci výzkumů, ale i studií provedených v řešení projektů a smluvních výzkumů byly provedeny další uváděné mechanické zkoušky jako: zkouška tříbodým ohybem (*ČSN EN ISO 14125*), Charpy test – zkouška rázové houževnatosti (*ČSN EN ISO 179-1*), a to jak při standardní teplotě tak i při nestandardních teplotách (+90 °C, -90 °C), jejichž výsledky jsou podrobně popsány ve výzkumných zprávách (Novák a Petrů [9]).

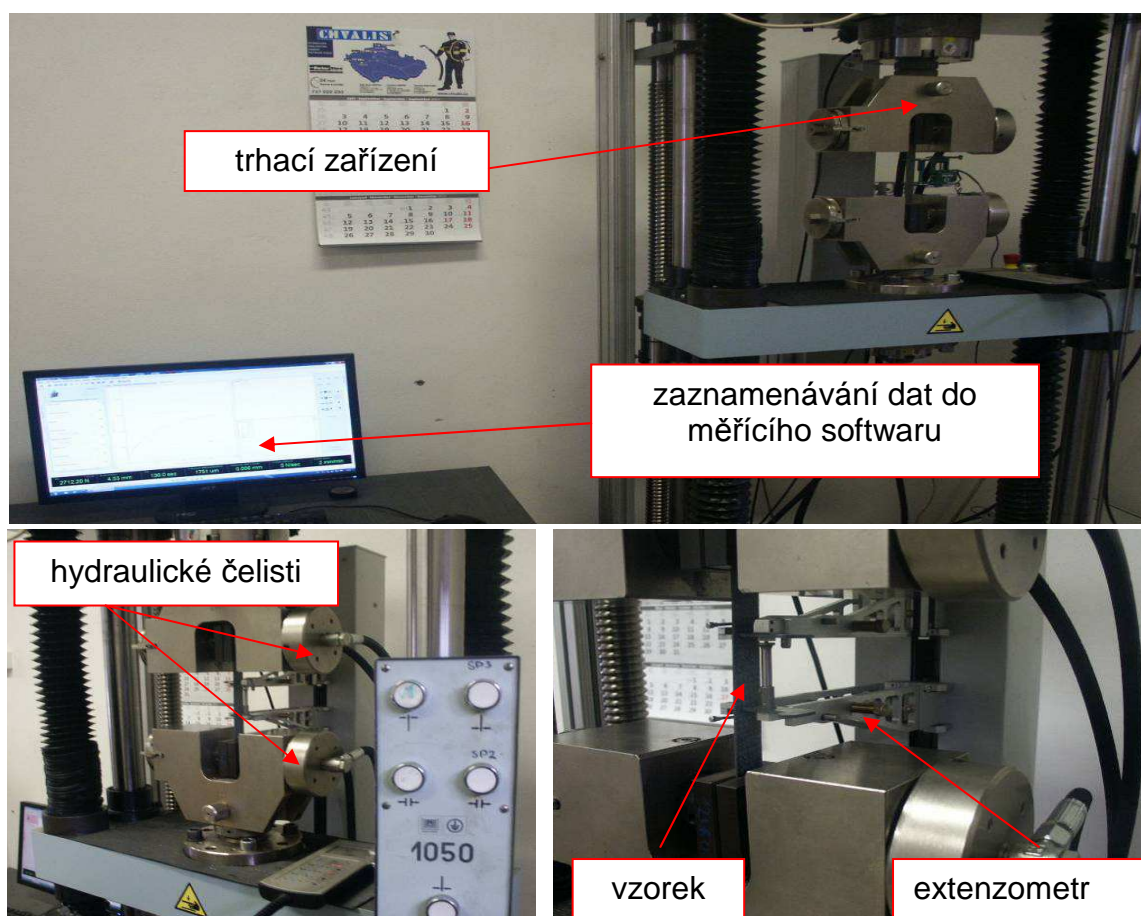
<sup>(14)</sup> V průběhu návrhů vývojových řešení kompozitů byly testovány i jiné matrice, jako třeba polyuretanové matrice, která má téměř stejné fyzikální i mechanické vlastnosti.

<sup>(15)</sup> Uhlíkový roving tvořily vlákna TENAX s jemností 1 600 tex a 24 000 jednotlivými fibrilami (STS 24K), skleněná vlákna Johns Manville s jemností 2 400 tex. Epoxidovou matrici dodala firma Huntsman Advance Materials. Dvousložková epoxidová matrice je kombinací těchto produktů: XB 3585 RESIN (plnidlo) a XB 3458 CH HARDENER (tvrdidlo)

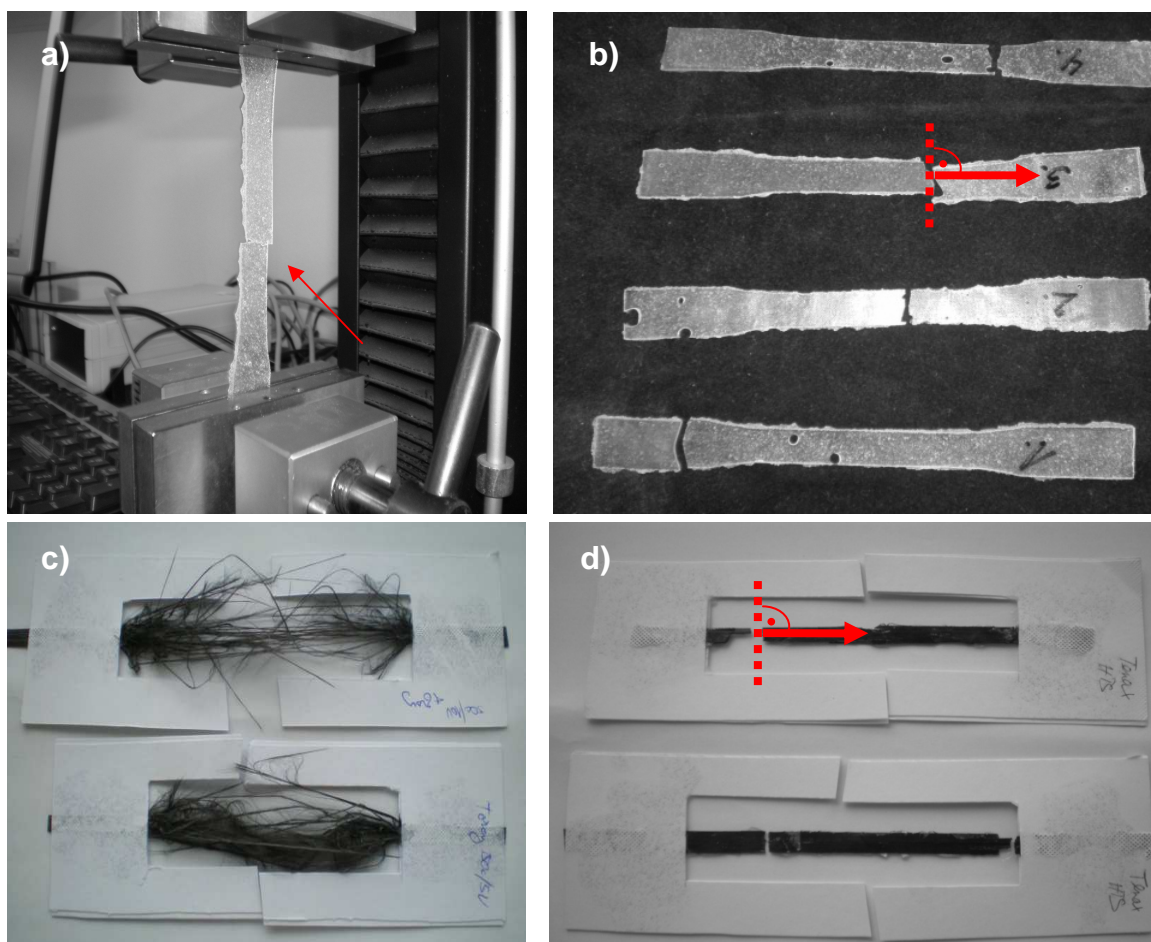
<sup>(16)</sup> Extenzometry jsou velice přesné a odolné průtahoměry. Existuje jich mnoho typů a provedení. Základními typy jsou axiální (osové), které měří délku deformace v podélné ose zkoušeného vzorku. Dále existují tzv. Bi-Axiální extenzometry, které se používají pro simultánní (současně probíhající) měření deformací ve dvou kolmých osách zároveň, čímž získáváme informace o deformaci, tj. jak změny délky zkoušeného vzorku, tak i změnu jeho průřezu. Extenzometry umožňují také měření ve velkém rozsahu teplot a dokonce je možné ještě tento rozsah dodatečně zvýšit. Lze i využít pro měření speciálních extenzometrů, jejichž použití může být axiálně-torzní, což umožňuje jednak měření deformace v ose vzorku, tak měření deformace vyvolané krutem.



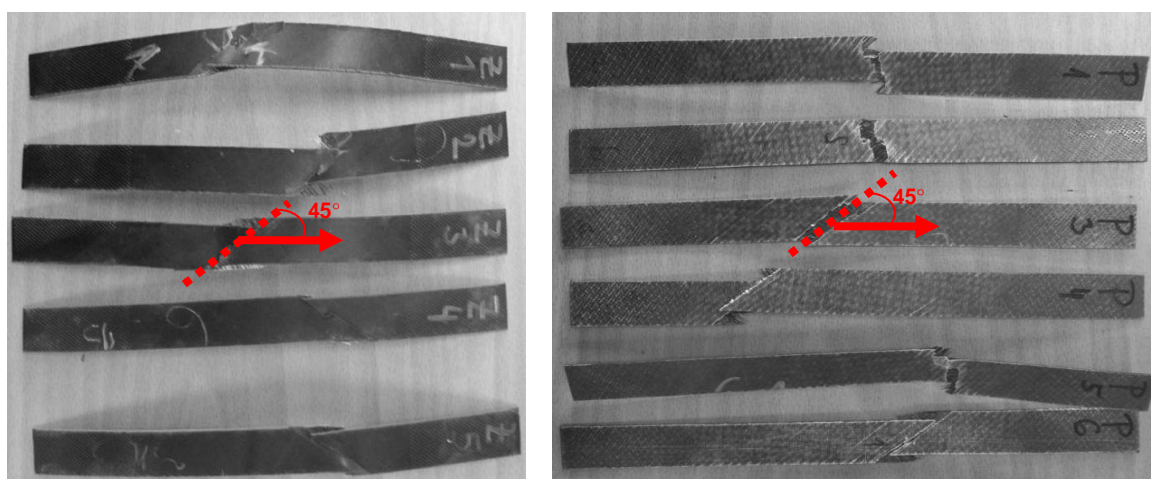
zaznamenávána do počítače. Uspořádání měření pro stanovení mechanických vlastností vzorků je uvedeno na obr. 2.3.2. Charakteristická deformace a přetvoření jednotlivých vzorků (samotné matrice, samotných vlákenných pramenců, kompozitních struktur) jsou uvedeny na obr. 2.3.3. Z výsledných přetvoření je patrné, že vzorky matrice mají přibližně pravidelné izotropní přetvoření resp. porušení je kolmé na směr namáhání (červená šipka značí směr namáhání, čárkovaná směr porušení), naopak vzorek s vlákenným pramencem se deformací přetrhne a vlákna vytvářejí chaotické přetvoření. Pro ilustraci je uveden i vzorek kompozitní struktury s podélnou orientací vlákenné výztuže mající pravidelné porušení (deformaci), která je prakticky stejná jako u kompozitních struktur s příčně kladenými vlákny, kde je takový průběh deformace očekávaný. Je to dáno tím, že tato kompozitní struktura měla velmi přesně kladený vlákenný pramenec, a proto při tahovém namáhání byla vlákna ideálně namáhána, tedy ve směru osy zatížení a prakticky došlo k rovnoměrnému porušení (trhlina vyvíjející se kolmo na zatěžující sílu). Směrová orientace vlákenné výztuže, však významně ovlivňuje porušení vzorku kompozitní struktury, což je patrné na obr. 2.3.4, kde byly vytvořeny kompozitní struktury s různým směrovým uspořádáním vláken vzhledem k směru namáhání. Z přetvoření vzorku s orientací vláken pod úhlem  $45^\circ$  je patrné, že se deformace šíří také pod úhlem  $45^\circ$ . Příklad charakteristického průběhu výsledné závislosti síly na posunutí vzorku matrice, vzorku vláken, vzorku kompozitní struktury, je uveden na obr. 2.3.5. Ukázka výsledků závislosti napětí na protažení získaných z extenzometru je uvedena na obr. 2.3.6.



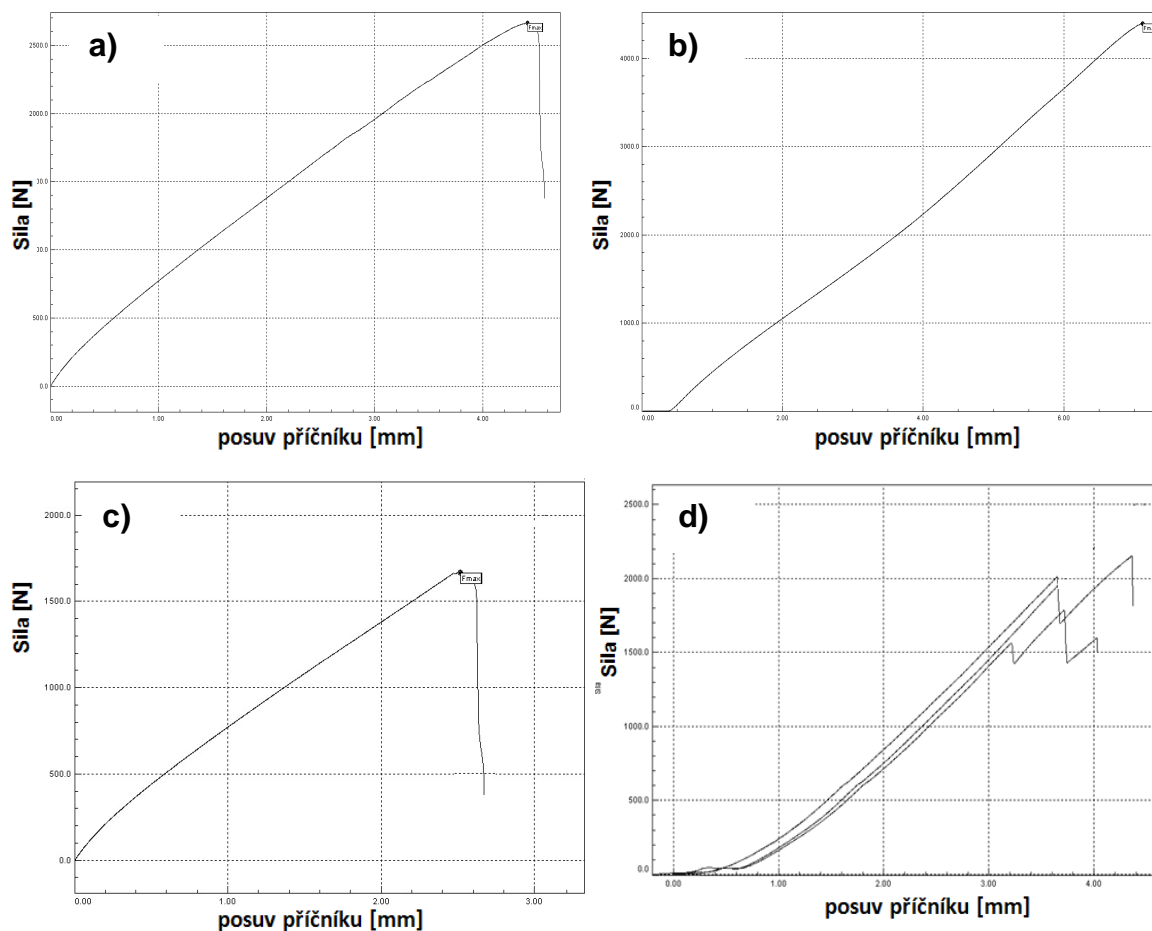
**Obr. 2.3.2.** Umístění testovaného vzorku do trhacího zařízení podle normy ČSN EN ISO 527-1 (640604).



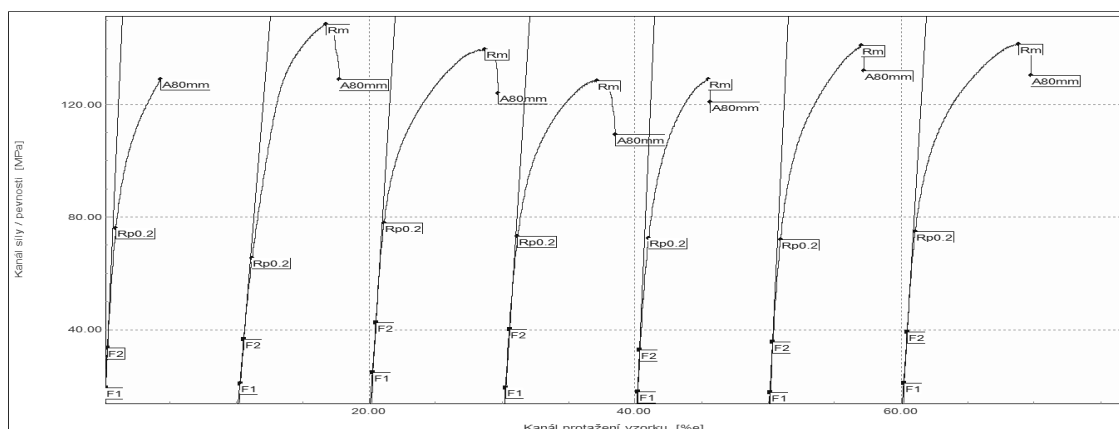
**Obr. 2.3.3.** Přetvoření testovaných vzorků: a) vzorek matrice v upínacích čelistech, b) porušení vzorku matrice, c) vzorek pramence vláken, d) porušení vzorku kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny v podélném směru.



**Obr. 2.3.4.** Přetvoření testovaných vzorků kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny s různou orientací kladení vláken: uhlíková vlákna (vlevo), kombinace uhlíkových a skleněných vláken (vpravo).



**Obr. 2.3.5.** Charakteristické průběhy síly na protažení vzorku z tahové zkoušky: a) matrice, b) uhlíková vlákna, c) skleněná vlákna, d) porovnání kompozitní struktury vyztužené podélně kladenými uhlíkovými vlákny a skleněnými vlákny.



**Obr. 2.3.6.** Porovnání výsledků testovaných vzorků kompozitní vlákněné struktury s uhlíkovými vlákny: závislost napětí na protažení vzorku získaných z extenzometru.

Z výsledků uvedených na obr. 2.3.5 je patrné, že vzorky matrice a vláken mají přibližně lineární závislost tahové síly na posunutí vzorku v podélném směru, prakticky v celém průběhu tahové zkoušky. Lze také konstatovat, že samotná testovaná uhlíková vlákna měla v průměru přibližně 1,7x vyšší pevnost než skleněná vlákna při stejném objemovém

zaplnění a tedy pro vlákenné výztuže rámu by byly z hlediska pevnosti výhodnější. V porovnání vzorků kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny v podélném směru se vzorky kompozitní struktury s různou orientací vláken mají při jednoosé tahové zkoušce lepší mechanické vlastnosti. Také průběhy závislosti tahové síly jsou rozdílné, zatímco u vzorků kompozitní struktury s podélně kladenými vlákny je přibližně lineární závislost v celém rozsahu měření (obr. 2.3.5d), tak u vzorků kompozitní struktury s různou orientací vláken bylo patrné, že mají pouze do meze kluzu lineární závislost, jejíž velikost je ovlivněna objemovým zaplněním vláken. Na obr. 2.3.6 jsou uvedeny vzorky s orientací vláken  $45^\circ$ ,  $V^f = 40\%$ , kde byla stanovena mez kluzu  $R_e \approx 75 \pm 3 \text{ MPa}$  a mez pevnosti  $R_M \approx 120 \pm 15 \text{ MPa}$ , po překročení meze kluzu se projevuje určitá nelinearita až do meze pevnosti podobná charakteristickému průběhu tahové kontrakce u elastických materiálů (průběh podobný tahové zkoušce oceli). Je to dáno tím, že kompozitní struktura, která má vlákna orientovaná pod určitým úhlem se při jednoosém namáhání významněji protahuje oproti kompozitní struktuře s podélně kladenými vlákny a nedochází u ní k šíření trhliny kolmé na směr zatížení (Petrů, Bronček, Lepšík a Novák [10]). Orientace vláken způsobuje také určité disipační vlastnosti kompozitní struktury projevující se změnou rychlosti deformace přetržení, která není zcela konstantní  $\partial \varepsilon / \partial t \neq \text{konst.}$  a zároveň v porovnání s podélně kladenými vlákny trhlina vykonává delší dráhu, čímž se ovlivňuje velikost deformační energie. Z měření testovaných vzorků plyne, že s orientací vláken vůči působícímu napětí se mění mechanické vlastnosti testovaného vzorku, kde největší pevnost stanovená z jednoosé tahové zkoušky má kompozitní struktura s podélně kladenými vlákny. Naopak nejvyšší disipační vlastnosti zřejmě bude mít kompozitní struktura s vlákny orientovanými přibližně pod úhlem  $45^\circ$  <sup>(17)</sup>. Uvedené příklady výsledků a informace získané z měření mechanických vlastností včetně rozborů průběhu přetvoření testovaných vzorků jsou cenné pro návrh konstrukčního řešení rámu vyvíjeného z kompozitní materiálové struktury vyztužené z dlouhých vláken.

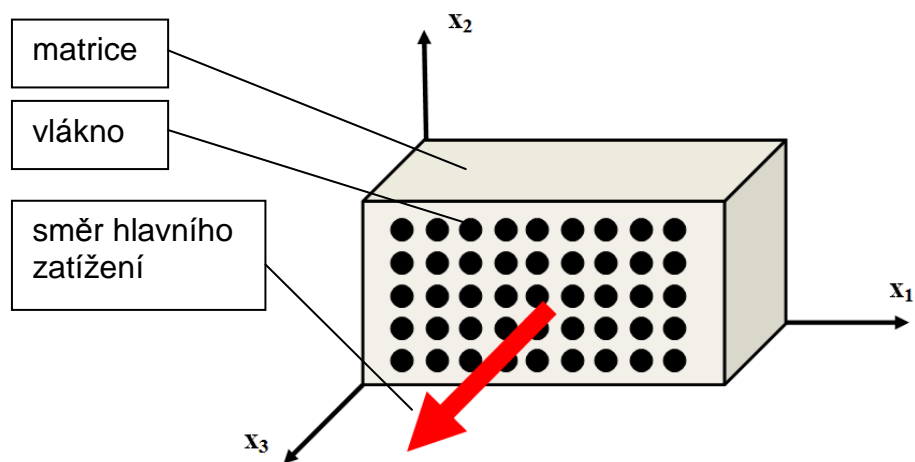
## 2.4 Analytické modely pro studii mechanických vlastností vzorků vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny

Numerické modelování mechanických vlastností vzorků z vlákenných kompozitních struktur je velmi složitý problém, neboť neznámých parametrů, které vstupují do modelové simulace je mnoho, jak bude následně diskutováno. Je tedy nutné některé parametry vhodně verifikovat s analytickými modely. Teoretický popis mechanických vlastností vzorků je obtížný, přestože budeme předpokládat, že jsou vytvořeny v ideálním případě z pravidelně uspořádané struktury resp. příčně izotropní (transverzálně izotropní) struktury, jak je uvedeno na obr. 2.4.1. Jedná se o to, že v odpovídajícím modelu musí být zahrnuta vazba na smísení a propojení strukturního geometrického uspořádání jednotlivých složek **A**, **B**, **C** (viz obr. 2.1.3), aby se vytvořil multifázový systém přibližující chování kompozitní struktury. Proto lze na tento problém modelování nahlížet jednak z pozice kontinua (celistvého modelu bez geometrického

<sup>(17)</sup> Pozn. Nebude to platit obecně, neboť jestliže budeme vzorky zatěžovat ve více osách či jiným namáháním než tahovým např. krutem, může naopak směrová orientace vláken zvyšovat mechanické vlastnosti vzorku.



uspořádání jednotlivých složek), nebo vytvořením zcela nového modelu přibližující strukturní parametry, tedy že zde budou zahrnuty jednotlivé složky pomocí vytvořené strukturní jednotky. Problematiku přístupu analytického modelování mechanických vlastností obecných vláknenných struktur prostřednictvím strukturní jednotky uvádí mj. Wyk pro studii kontaktů mezi vlákny [11], na kterého dále navázal Neckář [12]. Přesto pro popis mechanických vlastností vláknenné kompozitní struktury je to ještě obtížnější a nebylo to dosud patřičně objasněno. Zřejmě je to dáno tím, že pro pochopení mechanických vlastností je důležitější znalost deformačního mechanismu resp. procesu porušování, než samotná znalost absolutní hodnoty pevnosti, kterou nelze s dostatečnou přesností stanovit. Je to dáno tím, že nelze uceleně sestavit obecnou energetickou teorii (odvodit empirické vztahy pro deformační práci) na základě statistických charakteristik, jako to lze provést s velmi dobrou přesností u jiných anizotropních struktur (Petrů a kol. [13], [14]). Problémem je, že jednotlivé složky tvořící kompozitní strukturu, nelze spolehlivě kvantifikovat ani u homogenních izotropních materiálů (matrice, skleněná vlákna), natož u anizotropních struktur jako jsou uhlíková vlákna (teoretická hodnota uváděná v tabulkách je jiná, než následně experimentálně stanovená). Proto hlavní problémy jsou spojeny se složitostí popisu a modelováním deformace a z toho plynoucího charakteru průběhu napětí (vliv koncentrace napětí při namáhání). Je to dáno především technologickými vlivy při výrobě kompozitu (vliv teploty, vlhkosti, počáteční mikroporuchy), které pro modelové simulace nelze předvídat a také je poměrně obtížné tyto parametry i experimentálně identifikovat<sup>(18)</sup>. Přesto byly sestaveny a odvozeny významné analytické modely, kde autoři vycházeli ze studie a charakteru přetváření ideálního příčně izotropního kompozitu s dlouhými vlákny, což přibližně odpovídá ideálně strukturnímu mikroskopickému rozboru, který byl uveden na obr. 2.1.3 nahoře.



**Obr. 2.4.1.** Model idealizované příčně izotropní vláknenné kompozitní struktury.

Model prostorové příčně izotropní vláknenné kompozitní struktury rozšiřující rovnici (2.2.3) lze definovat 6 nezávislými elastickými konstantami prostřednictvím konstitutivní

<sup>(18)</sup> V pokročilých modelových simulacích můžeme sestavovat materiálové modely s prakticky libovolnými parametry, tedy i se statistickými parametry popisující technologické výrobní vlivy, např. prostřednictvím teorií náhodných polí jak uvádí Bittnar a Šejnoha [15]. Problémem však zůstává jak tyto vlivy identifikovat a následně statisticky vyhodnocovat.

rovnice (2.4.1). Mechanické vlastnosti takové kompozitní struktury jsou dále ovlivněné objemovým množstvím vláken  $V^f$  a matrice  $V^m$ .

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{12}/E_{11} & -\nu_{12}/E_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & -\nu_{23}/E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_{11} & -\nu_{23}/E_{22} & 1/E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}, \quad (2.4.1)$$

kde  $\sigma_{ii}, \varepsilon_{ii}$  jsou hlavní napětí a přetvoření v transversálním izotropním kompozitu do jednotlivých os souřadného systému  $x_1, x_2, x_3$ , přičemž platí  $\sigma_{11} > \sigma_{22} = \sigma_{33}$ ,  $\varepsilon_{11} \neq \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$ ,  $\tau_{12}, \tau_{23} = \tau_{13}$  jsou smyková napětí v daných rovinách,  $\gamma_{12}, \gamma_{23} = \gamma_{13}$  vyjadřuje zkos do jednotlivých rovin,  $E_{11}, E_{22} = E_{33}$  vyjadřuje podélný a příčný modul pružnosti,  $G_{12}, G_{23}$  je smykový modul v rovině hlavního směru zatížení a v rovině kolmé k hlavnímu směru zatížení,  $\nu_{12}$  je Poissonovo číslo v rovině hlavního směru zatížení a  $\nu_{23}$  Poissonovým číslem v rovině kolmé k hlavnímu směru zatížení.

Predikce mechanických vlastností příčně izotropního kompozitu byla součástí mnoha výzkumů a studií v minulosti a je předmětem zkoumání i v současnosti, kde vesměs ze studií vyplývá, že pro ucelené hodnoty záleží na znalosti všech elastických konstant vstupujících do modelu podle rovnice (2.4.1). Je nutno podotknout, že tyto elastické konstanty jsou zpravidla pro každý vytvořený kompozit rozdílné, a proto je obtížné vždy stanovit všechny konstanty prostřednictvím analytických modelů. Při navrhování kompozitních konstrukcí se proto některé konstanty v minulosti zanedbávaly nebo se dodatečně získaly prostřednictvím měření. Postupem času docházelo k rozšiřování analytických vztahů tak, že vznikl ucelený přístup k získání všech elastických konstant, který lze využít prostřednictvím následujících modelů, jako jsou:

- fenomenologické modely,
- semi-empirické modely,
- homogenizované modely,
- pružně – elastický model.

### 2.4.1 Fenomenologické modely

Fenomenologické modely byly v minulosti vytvořeny jako prvotní matematické odvození mechanických vlastností příčně izotropních vlákněných kompozitních struktur, ale lze je dobře využít dodnes. Mezi takovéto modely patří Voigtův a Reussův model. Jedná se o modely využívající směšovacího pravidla (smísení jednotlivých vstupních složek, tj. vláken a matrice), přičemž Voigtův model je velmi dobře použitelný pro určení elastických konstant  $E_{11}, \nu_{12}$  definovaných vztahy (2.4.2 a 2.4.3) a je charakteristický izotropním přetvořením. Reussův model je využitelný pro stanovení  $E_{22}, G_{12}$

definovaných vztahy (2.4.4 a 2.4.5) a na rozdíl od Voigtova modelu je charakteristický izotropním napětím.

$$\frac{d\sigma_{11}}{d\varepsilon_{11}} = V^f \frac{d\sigma^f}{d\varepsilon^f} + V^m \frac{d\sigma^m}{d\varepsilon^m} \Rightarrow E_{11} = V^f E_{11}^f + V^m E^m, \quad (2.4.2)$$

$$\nu_{12} = V^f \nu_{12}^f + V^m \nu^m, \quad (2.4.3)$$

$$E_{22} = \frac{E_{22}^f E^m}{E^m V^f + E_{22}^f E^m}, \quad (2.4.4)$$

$$G_{12} = \frac{G_{12}^f G^m}{G^m V^f + G_{12}^f E^m}, \quad (2.4.5)$$

kde  $E_{11}^f, E_{22}^f$  je podélný a příčný modul pružnosti vláken,  $G_{12}^f$  je smykový modul vláken,  $\nu_{12}^f$  je Poissonovo číslo v rovině hlavního směru zatížení vlákna.

## 2.4.2 Semi-empirické modely

Semi-empirické modely byly vytvořeny později než fenomenologické modely a jsou stále s novými informacemi a poznatky upravovány. Jejich vývoj zejména vedl k dalšímu rozšíření Voigtova a Reussova modelu, resp. tyto modely modifikoval o korekční faktory zpřesňující výsledné elastické konstanty pro dané typy vstupních složek. Do této kategorie spadají modely, které jsou v určitých modifikacích implementovány do numerických programů využívající metody konečných prvků jako je mj. Halpin-Tsai model nebo Chamisův model.

### ▪ Modifikovaný model podle směšovacího pravidla

Modifikovaný model podle směšovacího pravidla vychází z Voigta [16] a Reusse [17] a je pro elastické konstanty  $E_{11}, \nu_{12}$  definovaný stejně, tedy podle rovnic (2.4.2 – 2.4.3). Modifikace nastává u konstant  $E_{22}, G_{12}$ , protože výsledná rozdílnost mezi výsledky získanými měřeními a vztahy (2.4.4 – 2.4.5) je obvykle znatelná. Proto bylo nutné provést korekci pro  $E_{22}, G_{12}$  podle rovnice (2.4.6 – 2.4.7).

$$\frac{1}{E_{22}} = \frac{\zeta^f V^f}{E_{22}^f} + \frac{\zeta^m V^m}{E^m}, \quad (2.4.6)$$

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{\frac{V^f}{G_{12}^f} + \frac{\zeta^m V^m}{G^m}}{V^f + \zeta^m V^m}, \quad (2.4.7)$$

kde  $\zeta^f, \zeta^m$  jsou korekční faktory, které lze podle Younese a kol. [18] vyjádřit jako:

$$\zeta^f = \frac{E_{11}^f V^f + [(1 - \nu_{12}^f \nu_{21}^f) E^m + \nu_{12}^m \nu_{21}^f E_{11}^f] V^m}{E_{11}^f V^f + E^m V^m},$$

$$\zeta^m = \frac{E^m V^m + [(1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^m) E_{11}^f - (1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^f) E^m] V^f}{E_{11}^f V^f + E^m V^m}, \quad \zeta' \text{ je proměnná funkce } 0 < \zeta' < 1,$$

přičemž se preferuje hodnota  $\zeta' \approx 0,5 - 0,6$ .

### ▪ Halpin – Tsai model

Jedná se o model, který je implementován do řady numerických programů využívajících MKP. Tento model je vyvíjen jako semi-empirický model [19] opět pro korekci  $E_{22}, G_{12}$ . Jeho semi-empirické odvození (2.4.8 – 2.4.9) využívající korekčních faktorů  $\zeta, \xi$  má velmi dobrou shodu s experimenty.

$$E_{22} = E^m \left( \frac{1 + \xi \zeta V^f}{1 - \zeta V^f} \right), \quad (2.4.8)$$

$$G_{12} = G^m \left( \frac{1 + \xi \zeta V^f}{1 - \zeta V^f} \right), \quad (2.4.9)$$

kde  $\zeta$  je korekční faktor, pro který platí  $\zeta = \frac{M^f / M^m - 1}{M^f / M^m + \xi}$ ,  $\xi$  je konstanta, která pro  $E_{22}$

je rovna 1, a pro  $G_{12}$  je rovna 2,  $M = E$  nebo  $G$  v případě, že se bude jednat o vyjádření  $E_{22}$  resp.  $G_{12}$  podle rovnic (2.4.8 – 2.4.9).

### ▪ Chamis model

Jedná se o další semi-empirický model [20], který byl na rozdíl od předešlých modelů vyvíjen nejen pro nezávislé elastické konstanty  $E_{11}, E_{22}, G_{12}, \nu_{12}$ , ale již i pro  $G_{23}$ . Pro stanovení  $E_{11}, \nu_{12}$  vychází opět z Voigta a Reusse podle rovnic (2.4.2 – 2.4.3). Chamisův model pro výpočet dalších elastických konstant zavádí do řešení druhou odmocninu objemového množství vláken  $\sqrt{V^f}$ , jenž má v rovnicích (2.4.10 – 2.4.12) charakter nestlačitelnosti vláken, což je v souladu se zákonem o zachování hmotnosti.

$$E_{22} = \frac{E^m}{1 - \sqrt{V^f} (1 - E^m / E_{22}^f)}, \quad (2.4.10)$$

$$G_{12} = \frac{G^m}{1 - \sqrt{V^f} (1 - G^m / G_{12}^f)}, \quad (2.4.11)$$



$$G_{23} = \frac{G^m}{1 - \sqrt{V^f} (1 - G^m / G_{23}^f)}, \quad (2.4.12)$$

kde  $G_{23}^f$  je smykový modul pružnosti vláken v rovině kolmé k hlavnímu směru zatížení.

### 2.4.3 Homogenizované modely

Homogenizované modely jsou zobecněné modely, které mohou být využité pro stanovení velmi přesných hodnot elastických konstant pro vyvíjené typy kompozitních struktur vyztužených podélně kladenými vlákny. Mezi takové modely patří např. **Mori – Tanaka model** [21], **Soudržený (konzistentní) model** vytvořený Hillem [22] nebo **Bridgingův model**. Jejich využitelnost v porovnání s fenomenologickými či semi-empirickými modely, ale do značné míry omezuje obtížnější stanovování všech konstant vstupujících do homogenizovaných modelů. Příkladem lze uvést Eshelbyho tenzor tuhosti využitelný pro inkluze, který je zaveden jak v Mori-Tanaka modelu, tak i v konzistentním modelu. Z homogenizovaných modelů lze vzhledem k uvedeným souvislostem případně využít pro stanovení elastických konstant Bridgingův model.

#### ▪ Bridging model

Jedná se o model, který je vyvíjen pro predikci tuhosti a pevnosti příčně izotropních vláknenných kompozitů. Elastické vlastnosti jsou pro modul pružnosti  $E_{11}, \nu_{12}$  stejné jako u modelů Voigta a Reusse (2.4.2 – 2.4.3). Elastické konstanty  $E_{22}, G_{12}, G_{23}$  lze prostřednictvím Bridgingova modelu vyjádřit podle vztahů (2.4.13 – 2.4.14).

$$E_{22} = \frac{(V^f + V^m a_{11}) \cdot (V^f + V^m a_{22})}{(V^f + V^m a_{11})(V^f S_{11}^f + V^m a_{22} S_{22}^m) + V^f V^m (S_{21}^m - S_{21}^f) a_{12}}, \quad (2.4.13)$$

$$G_{12} = \frac{(V^f + V^m a_{66}) \cdot G_{12}^f G^m}{V^f G^m + V^m a_{66} G_{12}^f}, \quad (2.4.14)$$

$$G_{23} = \frac{1/2(V^f + V^m a_{44})}{V^f (S_{22}^f - S_{23}^f) + V^m a_{44} (S_{22}^m - S_{23}^m)}, \quad (2.4.15)$$

kde  $a_{ii}, S_{ii}^{f,m}$  jsou složky matic, které se vztahují k poměrům vláken a matrice v kompozitní struktuře jak uvádí Huang [23] a [64], kde  $a_{11} = E^m / E_{22}^f$ ,  $a_{22} = a_{44} = 0,35 + (1 - 0,35)E^m / E_{22}^f$ ,  $a_{66} = 0,3 + (1 - 0,3)[0,5E^m / (1 + \nu^m)] / G_{12}^f$ ,  $a_{12} = (S_{12}^f - S_{12}^m)(a_{11} - a_{22}) / (S_{11}^f - S_{11}^m)$ ,  $S_{11}^{f,m} = 1 / E_{11}^{f,m}$ ,  $S_{12}^{f,m} = S_{21}^{f,m} = -\nu_{12}^{f,m} / E_{11}^{f,m}$ ,  $S_{22}^{f,m} = 1 / E_{22}^{f,m}$ ,  $S_{23}^{f,m} = S_{32}^{f,m} = -\nu_{23}^{f,m} / E_{22}^{f,m}$ .

### 2.4.4 Pružně – elastický model

Jedná se o model, který zpřesňuje stanovování elastických konstant  $E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}$  uváděných typů analytických modelů a zároveň umožňuje přibližně stanovit i neznámý parametr  $\nu_{23}$ , jak uvádí Hanshin a Rosen [24]. Zpřesnění elastických konstant modelu příčně izotropní vláknenné kompozitní struktury je provedeno rozšířením vstupních parametrů o objemové moduly matrice a vláken  $K^m, K^f$ . Je to dáno tím, že objemové moduly ovlivňují deformaci a přetvoření resp. se vážou na deformační energii přetvářeného kompozitu. Tím se získají parametry pro zpřesnění hledaných hodnot elastických konstant, které prostřednictvím pružně – elastického modelu lze vyjádřit podle vztahů (2. 4. 17 – 2. 4. 22).

$$E_{11} = V^f E_{11}^f + V^m E^m + \frac{4V^f V^m (\nu_{12}^f - \nu^m)^2}{\frac{V^f}{K^m} + \frac{1}{G^m} + \frac{V^m}{K^f}}, \quad (2.4.17)$$

$$E_{22} = 2(1 + \nu_{23})G_{23}, \quad (2.4.18)$$

$$\nu_{12} = V^f \nu_{12}^f + V^m \nu^m + \frac{V^f V^m (\nu_{12}^f - \nu^m) \left( \frac{1}{K^m} - \frac{1}{K^f} \right)}{\frac{V^f}{K^m} + \frac{1}{G^m} + \frac{V^m}{K^f}}, \quad (2.4.19)$$

$$G_{12} = G^m \frac{G^f (1 + V^f) + G^m V^m}{G^f V^m + G^m (1 + V^f)}, \quad (2.4.20)$$

$$\text{kde } K^f = \frac{E^f}{2(1 - 2\nu^f)(1 + 2\nu^f)}, \quad K^m = \frac{E^m}{2(1 - 2\nu^m)(1 + 2\nu^m)}.$$

Komplikovanější je v pružně – elastickém modelu získat vyjádření elastické konstanty  $G_{23}$ , která vstupuje i do určení  $E_{22}$  (2.4.18). Podle Christensena [25] lze vypočítat  $G_{23}$  rozvojem podle rovnice (2.4.21).

$$0 = A^I \left( \frac{G_{23}}{G_m} \right)^2 + 2A^{II} \left( \frac{G_{23}}{G_m} \right) + A^{III}, \quad (2.4.21)$$

kde  $A^I, A^{II}, A^{III}$  vyjadřuje proměnné funkce, které lze následně rozepsat,

$$A^I = 3V^f (1 - V^f)^2 \left( \frac{G_{23}^f}{V^m} - 1 \right) \left( \frac{G_{23}^f}{G^m} + \zeta^f \right) + \left[ \frac{G_{23}^f}{G^m} \zeta^m + \zeta^f \zeta^m - \left( \frac{G_{23}^f}{G^m} \zeta^m - \zeta^f \right) V^{f3} \right] \cdot \left[ V^f \zeta^m - \left( \frac{G_{23}^f}{G^m} \zeta^m + 1 \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
 A^{II} = & -3V^f V^{m2} \left( \frac{G_{23}^f}{V^m} - 1 \right) \left( \frac{G_{23}^f}{G^m} + \zeta^f \right) + \frac{V^f}{2} (\zeta^m + 1) \left( \frac{G_{23}^f}{G^m} - 1 \right) \left[ \frac{G_{23}^f}{G^m} + \zeta^m + \left( \frac{G_{23}^f}{G^m} \zeta^m - \zeta^f \right) V^{f3} \right] + \\
 & + \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{G_{23}^f}{G^m} \zeta^m - \left( \frac{G_{23}^f}{G^m} \zeta^m - 1 \right) V^f + 1 \right] \left[ (\zeta^f - 1) \left( \frac{G_{23}^f}{G^m} + \zeta^f \right) - 2 \left( \frac{G_{23}^f}{G^m} \zeta^m - \zeta^f \right) V^{f3} \right] \right\}, \\
 A^{III} = & -3V^f V^{m2} \left( \frac{G_{23}^f}{G^m} - 1 \right) \left( \frac{G_{23}^f}{G^m} + \zeta^f \right) + \left[ \frac{G_{23}^f}{G^m} \zeta^m + \left( \frac{G_{23}^f}{G^m} - 1 \right) V^f + 1 \right] \cdot \\
 & \cdot \left[ \frac{G_{23}^f}{G^m} + \zeta^f + \left( \frac{G_{23}^f}{G^m} \zeta^m - \zeta^f \right) V^{f3} \right],
 \end{aligned}$$

kde dochází k úpravě korekčních faktorů ze semi-empirických modelů (kap. 2.4.2) na  $\zeta^m = 3 - V^m$ ,  $\zeta^f = 3 - V_{23}^f$ .

Poissonovo číslo  $\nu_{23}$  lze následně vyjádřit vztahem (2.4.22) z objemového modulu  $K$  získaného z podélného přetvoření.

$$\nu_{23} = \frac{K - c^* G_{23}}{K + c^* G_{23}}, \quad (2.4.22)$$

kde  $c^* = 1 + 4K \frac{V_{12}^2}{E_{11}}$ ,  $K$  je objemový modul získaný z podélného přetvoření, který lze vyjádřit jako  $K = \frac{K^m (K^f + G^m) V^m + K^f (K^m + G^m) V^f}{(K^f + G^m) V^m + (K^m + G^m) V^f}$ .

## 2.4.5 Shrnutí poznatků z analytických modelů využitých pro získání elastických konstant vzorků příčně izotropní vlákně kompozitní struktury

Z analytických modelů je patrné, že pro různé elastické konstanty je vhodné využít různých metod analytického modelování a tedy se nespokojit jen s „jednou rovnicí“. Například pro elastické konstanty  $E_{11}, \nu_{12}$  jsou svou jednoduchostí vhodné fenomenologické modely Voigta a Reusse, pro  $E_{22}, G_{12}, G_{23}$  lze využít semi-empirického Chamisova modelu a pro stanovení  $\nu_{23}$  pružně – elastického modelu. Tyto analytické modely verifikované s reálnými experimenty mohou poskytnout jednak cenné informace a výsledky, ale zároveň se mohou stát vhodným porovnávacím nástrojem pro vytvářené numerické modely.

## 2.5 Numerické modely pro studii mechanických vlastností vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny

Měření a analytické modely vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny vytvořené za účelem studie mechanických vlastností a zároveň poskytující znalosti pro vývojové řešení rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny jsou obecně omezeny jen pro určité informace. Tedy nemohou vypovědět a vizualizovat okamžité rozložení deformace a napětí v materiálové struktuře. Je to dáno tím, že měření jsou omezeny možnostmi umístění snímačů a také tím, že některé vlastnosti prostě nelze dobře měřit (např. rozložení hlavního napětí a deformace v kompozitní struktuře). Znalost rozložení hlavních napětí a deformací ve struktuře je důležitá, i proto že z ní lze vycházet pro optimalizaci a výrobu rámu, neboť jejich znalostí by se dalo posoudit, jak se struktura přetváří a při jakém napětí. Také náročnost samotného měření (provedení měření, výroba vzorků, počet a kombinace možných variant vzorků) omezuje možnost získat rychlé informace v průběhu optimalizačních úprav (např. úprava rámu jiným uspořádáním vlákenných pramenců = jiná výsledná kompozitní struktura). V tomto případě je velmi výraznou možností pro podporu vývojového řešení sestavení odpovídající modelové simulace pomocí numerických metod. Nejvýznamnější je pro tento účel naprogramovat modelovou simulaci v prostředí metody konečných prvků (MKP), ale možnosti nabízejí i jiné numerické metody např. metoda diskrétních prvků (MDP), metoda hraničních prvků (MHP) či metoda konečných objemů (MKO). V této práci byla využívána výhradně MKP, neboť využití této metody navazuje na předchozí autorovi práce i vyučované předměty katedry částí a mechanismů strojů, které se specializují z numerických metod právě na modelování metodou konečných prvků. Mechanické namáhání kompozitních vzorků vyvolává ve vnitřní struktuře mnoho různorodých dějů, které se mění s velikostí deformace. Proto je nutné při modelování takovýchto struktur některé charakteristické vlastnosti zjednodušit či zanedbat, přičemž velkým problémem modelování mechanických vlastností kompozitní struktury je zejména popsání hlavních napětí v krátkých časových diferencích  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ . Řešení okrajového problému deformací vzniklých natahováním vzorku dále spočívá nejen v zadání správných okrajových podmínek a materiálových vlastností, ale také především v konstrukci navržené sítě konečných prvků. Programy MKP jsou v současné době velmi propracované a umožňují řešení spojitého problému převést na řešení konečné, kde v preprocesoru lze pro přibližné řešení navrhnout odpovídající geometricky jednoduché dílčí podoblasti (konečné prvky). Necht'  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  je souvislá oblast třírozměrného prostoru, ve které je problém řešen. Její hranice označme  $\Gamma$ , kde je  $\Gamma$  tzv. Lipschitzovská hranice a necht' aproximace zvolených bázeových funkcí jsou odvozeny nad každým konečným prvkem o velikosti  $l_{element}$ , neboť jakákoli spojitá funkce může být reprezentována lineární kombinací algebraických polynomů konvergujících ke spojitému řešení tj.  $\lim_{l_{element} \rightarrow 0} \rightarrow 1$ . MKP lze tedy chápat jako speciální

typ variační metody využívající matematického popisu řešení problému. Současné významné komerční softwary a programy MKP (např. Ansys, Abaqus, Permas, LS-Dyna, Marc, PAM CRASH) umožňují sestavit a následně řešit řady úloh s nelineárními materiály nejen s elastickým, ale i plastickým chováním odpovídajícím vlastnostem kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny. Dále umožňují s určitou přesností

studovat a modelovat kvalitativně složitější problém jakým bezesporu jsou kontaktní úlohy (např. modelování komplexního navíjení a ovíjení vlákenného pramence z cívky na geometricky složitý rám, atd.).

## 2.5.1 Výběr odpovídajícího programu MKP pro sestavení modelových simulací

V této práci byl vybrán pro všechny modelové simulace program PAM CRASH [26]. Jedná se o MKP program od společnosti ESI-Group (<http://www.esi-group.com/>) používaný pro studie nelineárních izotropních a anizotropních vlastností kompozitních materiálových struktur, kontaktních úloh při kvazi-statických a dynamických dějích, atd., jak bylo autorem uvedeno například v [10], [13], [14], [27], [28], [62] a [63]. Stejně jako obdobné MKP programy LS-Dyna, Abaqus Explicit, Ansys-Explicit Dynamics využívá pro studii plastických a velkých přetvoření explicitní metodu<sup>(19)</sup>. Program je postavený na Lagrangeovské formulaci<sup>(20)</sup> přetvoření, kde vztahy pro přetvoření tělesa (kontinua) v čase  $t \neq 0$  jsou řešeny pomocí centrálních diferencí. Základním principem explicitní metody je 2. Newtonův zákon, který lze vyjádřit v maticové podobě vztahem (2.5.1).

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}^E - \mathbf{F}^I, \quad (2.5.1)$$

kde  $\mathbf{M}$  je matice hmotností,  $\ddot{\mathbf{U}}$  je matice zrychlení vektorů posunutí uzlů,  $\mathbf{F}^E$  je matice vektorů externích sil působících na uzel,  $\mathbf{F}^I$  je matice vektorů interních sil (objemových).

Matici vektorů zrychlení, kde zrychlení vyjadřuje druhou derivaci hledaných (neznámých) posuvů lze získat podle vztahu (2.5.2), která je úpravou vztahu (2.5.1). Matice vektorů interních a externích sil lze následně vyjádřit podle vztahů (2.5.3 a 2.5.4).

$$\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{F}^E - \mathbf{F}^I, \quad (2.5.2)$$

$$\mathbf{F}^I = \sum_{e=1}^{N_e} \left( \int_{\Omega} B^T \cdot \sigma_n d\Omega + F^{Hurg} + F^{kont} \right), \quad (2.5.3)$$

$$\mathbf{F}^E = \sum_{e=1}^{N_e} \left( \int_{v_e} \rho \cdot \kappa_{i\alpha}^e dv_e + \int_{s_e} \chi_i \cdot \vartheta_{\alpha}^e ds_e \right), \quad (2.5.4)$$

kde  $B$  je prvková matice báзовých funkcí přetvoření,  $F^{kont}$  je vektor kontaktních sil,  $F^{Hurg}$  je vektor tlumících sil hourglassingu,  $\sigma_n$  je prvková matice působících napětí v prvku,  $\rho$  je měrná hmotnost přiřazená prvku,  $\kappa_i$  je vektor objemových sil,  $\chi_i$  je vektor povrchových sil.

<sup>(19)</sup> PAM CRASH je program postavený nejen na explicitní metodě (využívající předchozí časový krok), ale také umožňuje využívat implicitní metodu (okamžitý časový krok). Program využívá tzv. h-konvergenční výpočtu neboli zpřesňování výpočtu je docíleno tvarem použitého elementu a zvyšováním počtu elementů.

<sup>(20)</sup> Lagrangeova formulace přetvoření je odvozena od sledování pohybu materiálové částice z referenční konfigurace (nedeformovaný stav) v čase  $t=0$ , až do deformovaného stavu v čase  $t \neq 0$ .

Hledanou matici vektorů posuvů  $\mathbf{U}$  lze následně vyjádřit integrací zrychlení  $\ddot{\mathbf{U}}$  resp. rychlosti posuvů  $\dot{\mathbf{U}}$  podle následujících vztahů (2.5.5 – 2.5.6).

$$\dot{\mathbf{U}} \equiv \dot{\mathbf{u}} = \dot{u}_{t+\Delta t/2} = \dot{u}_{t-\Delta t/2} + \ddot{u}_t \cdot \frac{\Delta t_t + \Delta t_{t+\Delta t}}{2}, \quad (2.5.5)$$

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{u} = u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_{t+\Delta t/2} \cdot \Delta t_{t+\Delta t}, \quad (2.5.6)$$

kde  $u_t$  je vektor okamžitých posuvů,  $u_{t-\Delta t}$  a  $u_{t+\Delta t}$  je vektor předešlých resp. následných posuvů.

Program má propracované algoritmy složitěho nelineárního kontaktního propojení jak uvádí Belytschko, Liu a Moran [29], kde probíhající výpočet modelové simulace je rozdělen na zvolenou posloupnost  $m$  – časových intervalů (kde  $m \leq t$  a  $m_{min} = 1$ ). Pro každý časový krok se počítá vektor posuvů  $u_t$ , popisující že v následujícím časovém intervalu je změněna (přetvořena) původní referenční geometrie  $A_0$  na novou aktuální geometrii  $A_{t+\Delta t}$  změnou vektorů posuvů  $u_{t+\Delta t}$  původní referenční konfigurace podle vztahu (2.5.7).

$$A_{t+\Delta t} = A_0 + u_{t+\Delta t} \quad (2.5.7)$$

V dalších krocích lze vyjádřit pomocí konstitutivních vztahů okamžité Cauchyho napětí  $\sigma_{t+\Delta t}$  dané vztahem (2.5.8), které algoritmus procesoru vyjádří změnou přetvoření prvků  $d\epsilon = \partial u / \partial x_i$  ( $i=1, \dots, 3$ ), následně se dopočítá nový vektor vnitřních sil pro jednotlivé uzly. Veličiny s označením  $t + \Delta t$  se přepíší na  $t$  a výpočet pokračuje do dalšího kroku.

$$\sigma_{t+\Delta t} = f(\sigma_t, d\epsilon) \quad (2.5.8)$$

Výsledný časový krok modelové simulace  $\Delta t$  je popsán vztahem (2.5.9) související s rychlostí výpočtu, závisí úměrně na velikosti nejmenšího prvku  $l_{min}$  a na druhé odmocnině hustoty materiálu  $\rho$  nepřímo úměrné na druhé odmocnině modulu pružnosti  $E$ . Výhoda explicitní metody oproti implicitní je v řádově rychlejšímu kroku, protože u implicitní metody časový krok nabývá kvadratické funkce [29].

$$\Delta t \leq \Delta t^{krit} = l_{min} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad (2.5.9)$$

kde  $\Delta t^{krit}$  vyjadřuje minimální (kritický) časový krok pro simulace.

Procesor následně pro elastické a viskoplastické struktury vyjadřuje Cauchyho napětí  $\sigma_{ij}$  pomocí tenzoru nominálního napětí  $\sigma_{ij}^{nom}$ , který je nepřímo úměrný vektorům protažení  $\lambda_i$  (2.5.10), jak uvádí Flanagan a Taylor [30].

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^{nom}}{\lambda_i \cdot \lambda_k}, \quad (2.5.10)$$

kde  $\lambda_i$  vyjadřuje vektory protažení do hlavních směrů, kde  $\lambda_k$  je permutační variace.

## 2.5.2 MKP simulace mechanických vlastností vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny

Modelové simulace v MKP byly provedeny pro různé kombinace uspořádání výztuže vzorků kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny, což je důležité pro porovnání s experimenty a analytickými vztahy, čímž získáme materiálové vlastnosti pro numerické simulace pevnostních charakteristik celých rámců.

Byly vytvořeny 2 numerické modely pro vzájemné porovnání:

- I.** kontinuální model,
- II.** rozšířený kontinuální model se strukturní jednotkou.

Simulace se provedly pro kompletní posouzení mechanických vlastností  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{23}$  a elastických konstant  $E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{23}$ , přičemž tím se také získají informace přibližující vysvětlení chování tvarových změn vzorků sledovaných zejména při tahovém namáhání <sup>(21)</sup>. Modelové simulace byly provedeny v následujících krocích:

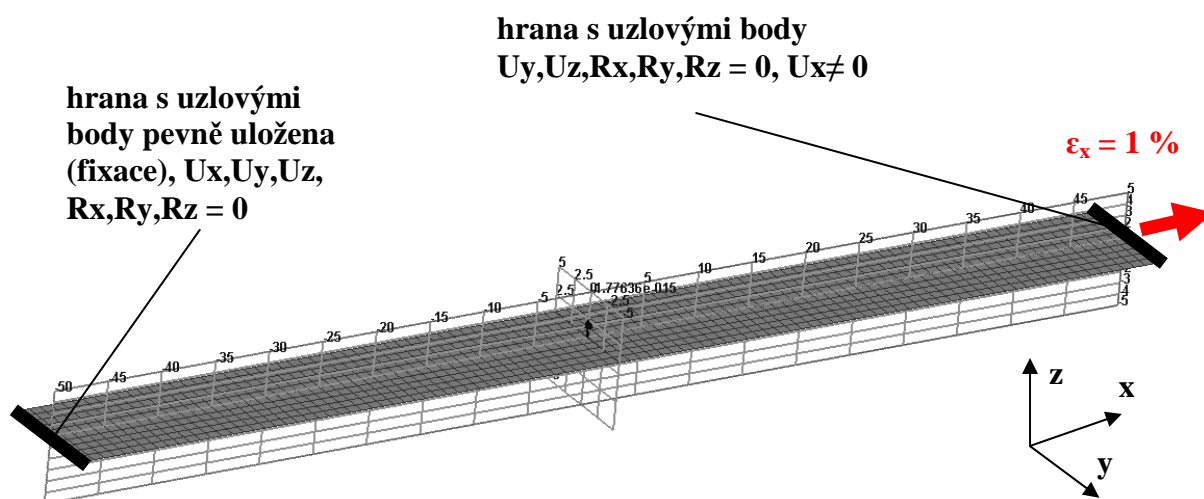
- vytvoření dvou modelových simulací vzorku kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny,
- vytvoření odpovídající konstrukce sítě konečných prvků výpočetního modelu v preprocesoru s importováním datového souboru do prostředí procesoru PAM CRASH,
- definování odpovídajících počátečních a okrajových podmínek,
- sestavení materiálového modelu vzorku kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny
- vyhodnocení a porovnání výsledků modelových simulací v postprocesoru.

### **I. Vytvoření kontinuálního modelu vzorku kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny**

MKP model byl vytvořený v pojetí uceleného kontinua skládajícího se z plošné geometrie odpovídající zkušebnímu vzorku, tj.  $L = 100mm$ , šířkou  $b = 20mm$  s tloušťkou  $h = 1,7mm$ . Konstrukce sítě konečných prvků numerického modelu byla vytvořena z SHELL elementů (2D elementů) s konstantní velikostí elementu 2 mm. Okrajové podmínky ovlivňující velikost posuvů a napětí definovaných rovnicemi (2.5.6 a 2.5.8) můžeme definovat dvěma způsoby, tj. na okrajové podmínky prvního a druhého druhu.

<sup>(21)</sup> Simulace vzorků při dynamickém namáhání s porušením vzorku kompozitní struktury byly publikovány autorem v [10].

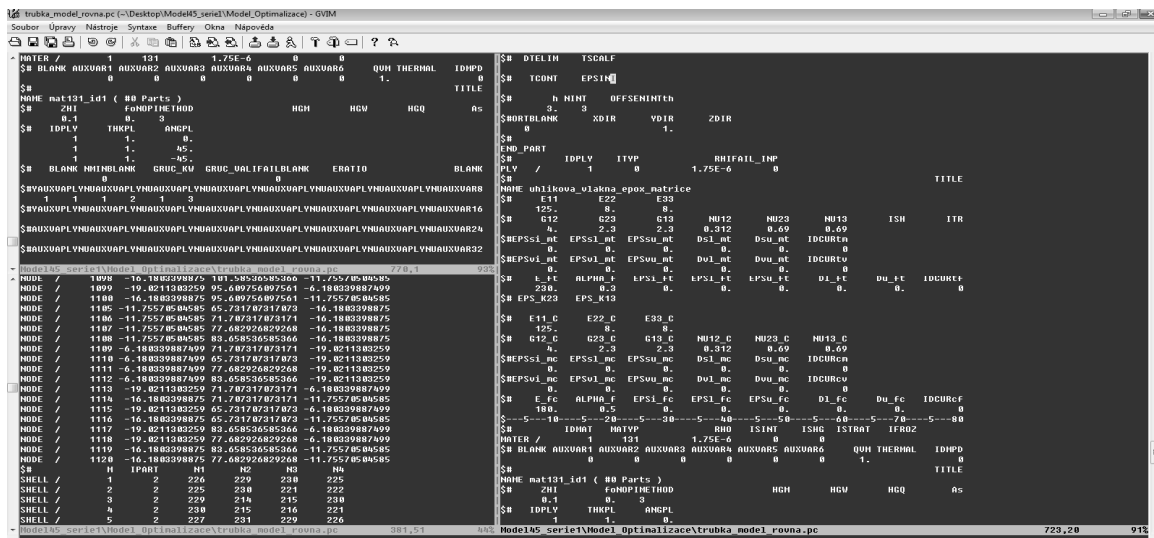
Prvním způsobem můžeme určit rozložení posuvů a napětí jsou-li známy silové podmínky tj. objemové síly, plošné (povrchové) síly, uzlové zatížení, atd. Druhým způsobem můžeme určit rozložení posuvů a napětí jsou-li známy geometrické podmínky, tj. velikost posuvu uzlů, velikost deformace, atd. Oba způsoby lze také kombinovat, následně hovoříme o smíšených okrajových podmínkách, jak uvádí např. Oliva [31] nebo Okrouhlík [32]. Okrajové a počáteční podmínky byly pro tento model vytvořeny prostřednictvím okrajové podmínky druhého druhu, takže na jedné straně bylo definováno na hraně vzorku zamezení posuvu a rotace uzlů  $U_i = R_i = 0$  do všech směrů (vetknuté uložení) a na opačnou stranu hrany vzorku byly uzlovým bodům definovány totožné podmínky, jen s umožněním posunu do směru pohybu natahování (do osy  $x$ ), přičemž posuv byl  $U_x = 1\text{mm}$ , resp. deformace  $\varepsilon_x = 1\%$  při rychlosti posunutí  $2\text{mm}.\text{min}^{-1}$ . Okrajové podmínky jsou uvedeny na obr. 2.5.1.



**Obr. 2.5.1.** Kontinuální MKP model vzorku kompozitní struktury vyztužený dlouhými vlákny s definovanými okrajovými a počátečními podmínkami.

Program PAM CRASH umožňuje zadávat a verifikovat všechny vstupní parametry modelové simulace (tj. materiálové vlastnosti, zatížení, objemové zaplnění  $V^f, V^m$ , elastické konstanty, kontakty, atd.) v textovém souboru s příponou **.pc**. Po určitém seznámení s rozhraním testového souboru se to pro uživatele může stát přehlednější, neboť v jednotlivých oknech datového souboru může přesně definovat a zadávat všechny vstupní parametry. Prostředí textového souboru s příkladovým zadáváním materiálového modelu je uvedeno na obr. 2.5.2. Objemové množství vláken  $V^f$  bylo postupně definováno pro jednotlivé analýzy v rozmezí 0,1–0,8. Takový model využívá směšovacího pravidla obdobně jako Chamis model uvedený v kap. 2.4.2. Samotný numerický model vzorku kompozitní struktury je vzhledem k jeho „jednoduchosti“ velmi dobře využitelný pro studie napětí a posuvů, ale nelze z něj stanovit interakce probíhající na mezifázovém rozhraní.

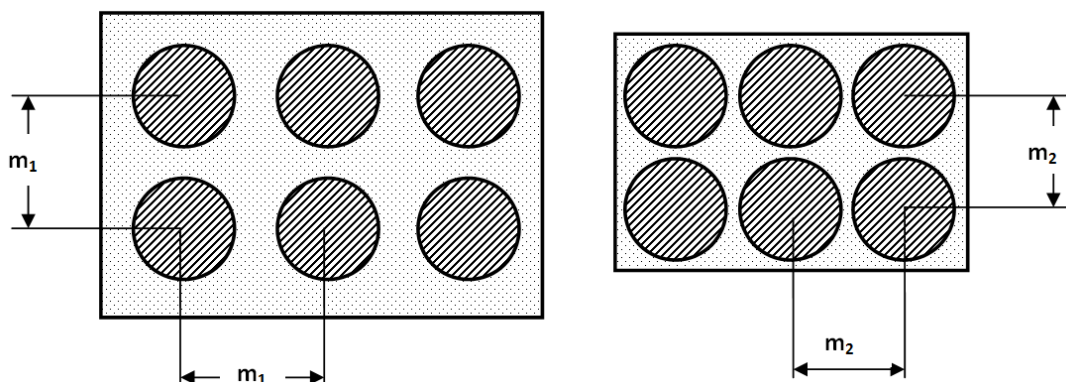




**Obr. 2.5.2.** Příkladová ukázka modifikace vstupních parametrů elastických konstant v datovém souboru MKP modelu.

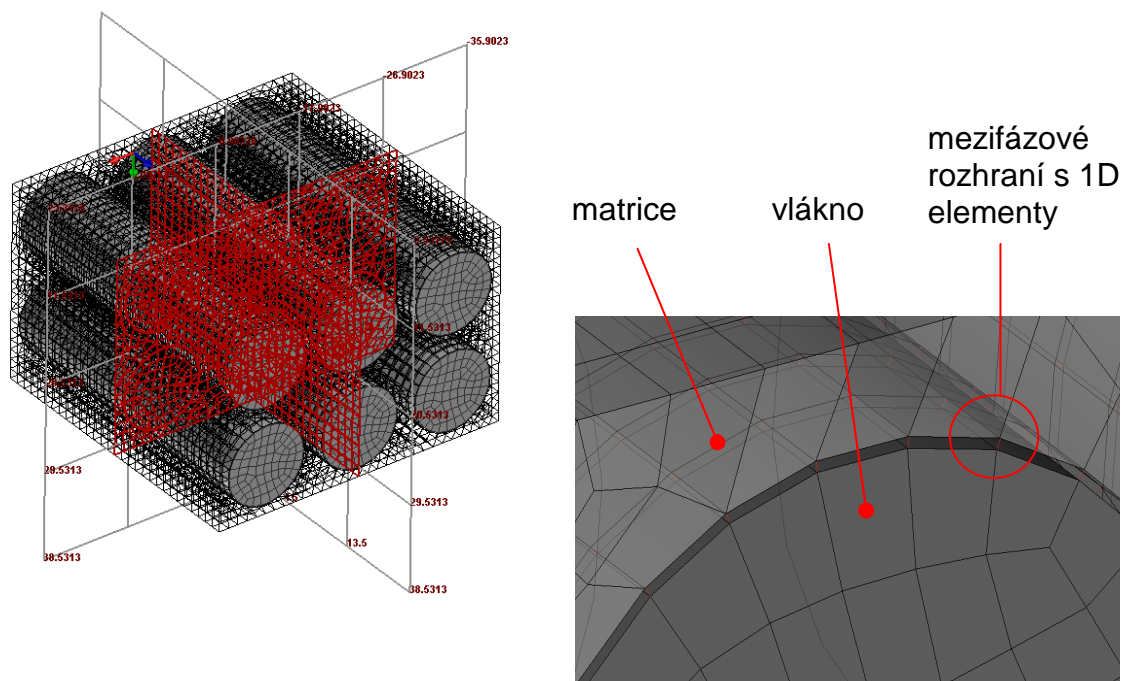
## II. Vytvoření rozšířeného kontinuálního modelu se strukturní jednotkou vzorku kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny

Druhý numerický MKP model, který byl vytvořen v pojetí strukturní jednotky, je na rozdíl od uceleného kontinuálního modelu vytvořený z 3 složek: vlákna – matrice – mezifázového rozhraní, kde mikroskopické rozměry takového modelu se více blíží reálnější struktuře kompozitu (srovnání s obrazovou analýzou uvedenou na obr. 2.1.3). Takovýto model lze vytvořit ze strukturní jednotky s  $1, 2, \dots, n$  počtem vláken, jenž objemovým geometrickým uspořádáním (např. strukturní jednotka je krychle, kvádr, koule) lze ovlivnit objemové množství vláken a matrice  $V^f, V^m$ , jak uvádí např. Neckář [12] a Stříž [33]. Změnu objemového zaplnění  $V^f$  lze uvést na příkladu strukturní jednotky kvádru, která je uvedena v řezu na obr. 2.5.3. Strukturní jednotka je tvořená 6 vláken (6 kružnic) se stejnou délkovou roztečí  $m_i$ , které jsou ohraničeny maticí (obdélník) a změnou rozteče lze následně zvyšovat nebo snižovat  $V^f$ .



**Obr. 2.5.3.** Změna objemového zaplnění vláken  $V^f$  provedena ve strukturní jednotce prostřednictvím změny rozteče vláken.

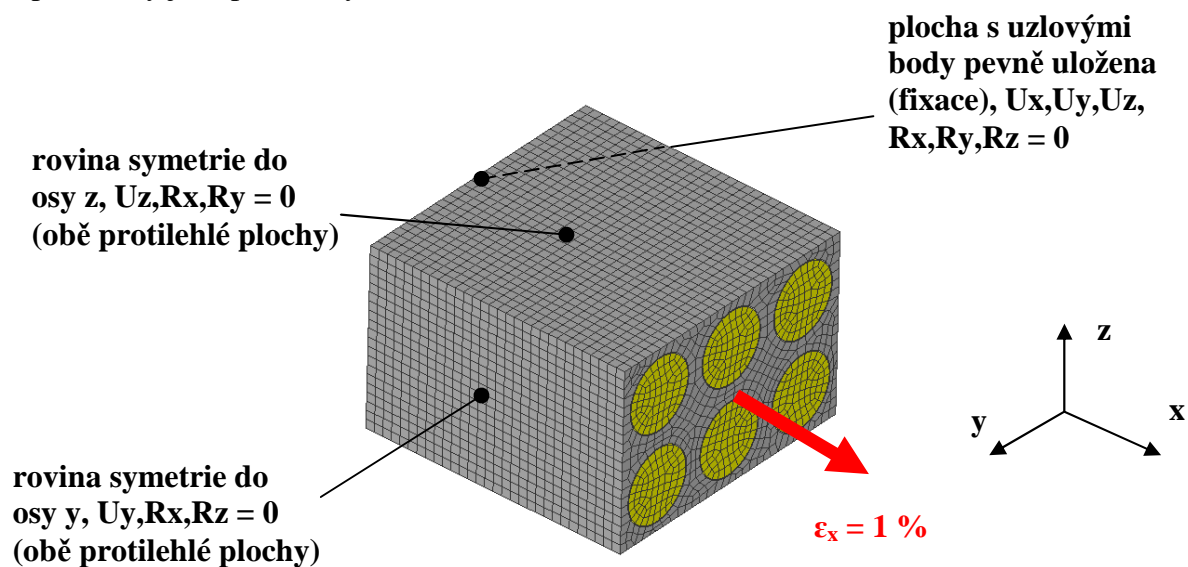
Sít' konečných prvků numerického modelu byla vytvořena z kombinace elementů, a to: BRICK elementů (3D elementů) s navrženou velikostí elementu 0,0002 mm definovaných pro vlákna a matici. Problémem je spojení vláken s maticí, neboť odpovídajícím propojením vzniká mezifázové rozhraní, jak bylo uvedeno v kap. 2.1. Možné řešení uvádí Ye a kol. [67], Younes a kol. [18], či Li [34], kteří tento problém také diskutují ve svých pracích, kde vytvořili strukturní model v principu stejný, jako je uveden na obr. 2.5.3. Jejich strukturní model je však vytvořený jen ze dvou složek tj. vlákno – matrice, které jsou ve vzájemném kontaktu. Autoři uvádějí, že vhodnými elastickými parametry a parametry kontaktu (tlumící, tuhostní koeficienty) lze „vyladit model“ až do takové podoby, že numerický model bude vykazovat tahové vlastnosti srovnatelné s naměřenými daty, a tedy prostřednictvím modelu se následně mohou stanovit neznámé elastické konstanty. Takovýto model je však velmi náchylný na singularity napětí, které vznikají vlivem kontaktů i vlivem okrajových podmínek. Proto problém modelování mezifázového rozhraní by bylo možné řešit také prostřednictvím BEAM elementů (1D elementů s ohybovými, tlakovými i torzními vlastnostmi), jak je uvedeno na obr. 2.5.4. Princip spočívá v tom, že tyto elementy mají definované materiálové vlastnosti odpovídající matici, ale zároveň vytvářejí třetí složku <sup>(22)</sup>. Tím dochází ke spojení matrice se složkou odpovídající vláknům a přibližnému vzniku mezifázového rozhraní.



**Obr. 2.5.4.** Strukturní MKP model vzorku kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny.

<sup>(22)</sup> Pozn. Tento přístup byl zvolen i s ohledem na znalosti získané řešením smluvních výzkumů zabývajících se modelováním netkané textilie Spunbond [35]. Spunbond je vlákená struktura tvořená mikroválky, které jsou spojeny polymerní gravúrou (výztuží), která způsobuje nejen ucelení textilie, ale také určitou pevnostní synergii. V rámci výzkumů byly vytvořeny numerické modely strukturní jednotky Spunbondu, které byly sestaveny tak, že vlákna a gravury byly z 2D elementů a propojení vytvořily Beam elementy (1D elementy). Výsledky tahových zkoušek numerických modelů a experimentů byly ve velmi dobré shodě a vedly k optimalizaci konstrukce gravurovacího válce.

Sít' konečných prvků byla vytvořena ve speciálním programu Altair Hypermesh 12.1 [36]. Navržením strukturního MKP modelu nastává však problém sestavení odpovídacích okrajových podmínek, jejíž významnost je důležitá z hlediska přesnosti a verifikace modelu tak, aby v modelu nevznikaly koncentrátoři a singularity napětí. Okrajové podmínky jsou vytvořeny opět druhého druhu (geometrické okrajové podmínky) tak, že obvodové plochy modelu, které vytvářejí roviny kolmé na rovinu směru natahování, mají na jedné straně definované podmínky symetrie (symetrie do osy  $y$  a  $z$ ) a na protilehlé straně nejsou okrajové podmínky předepsány. Na plochách v rovině směru natahování tj. ve směru osy  $x$  byly okrajové podmínky zavedeny tak, že na jedné straně se zamezilo posuvu a rotaci  $U_i = R_i = 0$  do všech směrů (fixované uložení) a na druhou protilehlou plochu vzorku bylo definováno to samé, jen s umožněním posunutí do směru pohybu natahování, přičemž tahové posunutí bylo definováno konstantně do maximálního přetvoření 1% tj.  $U_x = k \cdot \epsilon_x$ ,  $k = konst.$ , při rychlosti posunutí  $2mm \cdot min^{-1}$ . Okrajové podmínky jsou přiblíženy na obr. 2.5.5.



**Obr. 2.5.5.** Okrajové podmínky strukturního MKP modelu vzorku kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny.

Jedná se o velmi složitý komplexní MKP model, který však lze využít pro ucelené výzkumy. Jednak model lze využít pro stanovení všech působících napětí, neboť změnou okrajových podmínek můžeme následně získat všechny zatěžující stavy a elastické konstanty, jak je uvedeno v tab. 2.5.1. Také však lze takovýto model využít pro přiblížení procesů, které vznikají v interakci vlákna a matrice, tedy lze tím přispět ke studii nových poznatků v mechanismu mezifázového rozhraní (Petrů, Novák a Lepšík [37]).

**Tab. 2.5.1.** Okrajové podmínky strukturního MKP modelu vzorku kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny pro získání elastických konstant.

	Plochy v ose $x$		Plochy v ose $y$		Plochy v ose $z$	
	$+x$	$-x$	$+y$	$-y$	$+z$	$-z$
$E_{11}, \mu_{12}$	$U_x = k \cdot \left _{\varepsilon_x=1\%}\right.$	$U_i, R_i = 0$	$U_y, R_z, R_x = 0$	-	$U_z, R_x, R_y = 0$	-
$E_{22}, \mu_{23}$	$U_x, R_y, R_z = 0$	-	$U_y = k \cdot \left _{\varepsilon_y=1\%}\right.$	$U_i, R_i = 0$	$U_z, R_x, R_y = 0$	-
$G_{12}$	$U_y = k \cdot \left _{\varepsilon_y=1\%}\right.$ $U_z = 0$	$U_y = 0$ $U_z = 0$	$U_x = 0$ $U_z = 0$	$U_x = 0$ $U_z = 0$	$U_z = 0$	$U_z = 0$
$G_{23}$	$U_x = 0$	$U_x = 0$	$U_x = 0$ $U_z = 0$	$U_x = 0$ $U_z = 0$	$U_y = k \cdot \left _{\varepsilon_y=1\%}\right.$ $U_x = 0$	$U_x = 0$ $U_y = 0$

Přičemž se bude uvažovat, že platí:  $E_{11} = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}$ ,  $E_{22} = \frac{\sigma_{22}}{\varepsilon_{22}}$ ,  $G_{12} = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}}$ ,  $G_{23} = \frac{\tau_{23}}{\gamma_{23}}$ .

- **Sestavení materiálového modelu vzorků kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny**

Materiálové vlastnosti vstupující do obou numerických MKP modelů tj. I. kontinuálního modelu a II. kontinuálního modelu se strukturní jednotkou, resp. budou dále využity i v numerických modelech rámců (viz kap. 3), vycházejí z obecně známých hodnot, které uvádějí výrobci vláken a matrice. Pro typy testovaných vláken s danou hustotou a epoxidovou matricí jsou hodnoty uvedeny v tab. 2.5.2<sup>(23)</sup>.

**Tab. 2.5.2.** Materiálové a mechanické vlastnosti jednotlivých složek tvořící výslednou kompozitní strukturu.

Materiál	Hustota [kg.m <sup>-3</sup> ]	Modul pružnosti [GPa]		Smykový modul [GPa]		Poissonovo číslo [-]		Tahová pevnost [GPa]	Prodlouž. [%]
		$E_{11}^{f,m}$	$E_{22}^{f,m}$	$G_{12}^{f,m}$	$G_{23}^{f,m}$	$\nu_{12}^{f,m}$	$\nu_{23}^{f,m}$		
Uhlíková vlákna	1750±150	230	15	24	5.4	0,279	0,49	2,3±1,2	1,9±0,6
Skleněná vlákna	2370±230	72,4	72,4	28,7	28.7	0,22	0,22	1,06±0,65	4,8±0,7
Epoxid. matrice	1150±370	3.573	3.573	1,31	1,31	0,345	0,345	0,067±0,033	3,6
Jádro <sup>a)</sup>	50±0,36	0,0026		-	-	-	-	-	-

a) Materiálové vlastnosti jádra budou využity až v modelech pro rámcové konstrukce (kap. 3)

<sup>(23)</sup> Pozn. Výrobci uvádějí různé hodnoty elastických konstant podle geometrických rozměrů a typu vláken a matrice. Uváděné hodnoty se proto mohou lišit. Při řadě prováděných měření jsme těchto hodnot měření nedocílili, i přesto že se k nim naměřené hodnoty řádově přibližovali.

Materiálový model v programu PAM CRASH pro analýzu kompozitního chování vycházel z upraveného materiálového modelu s označením *130-132 - Multi-Layered Shell Element* a *62 - Elastic-Plastic for 8-Node Brick Shell Elements* z materiálové knihovny [26]. Tyto materiálové modely byly autorem publikovány např. v [27], [28], [38]. Jejich výhodou je zejména umožnění posuzovat vliv nejen přetvoření a napětí, ale také vliv tuhosti na elastické a elasto-plastické poškození struktury. Definované okrajové a počáteční podmínky a materiálové vlastnosti významně ovlivňují stabilitu, časovou náročnost a konvergenci výpočtu, která je dále ovlivněná zvolenými typy a velikostí konečných prvků. Volba typu prvku představuje z matematického hlediska podmínku úplnosti funkčních prostorů, v jejichž rámci hledáme přibližné řešení, jak uvádí např. Rektorys [39] a Petruška [40]. Zpravidla uživatelé významných komerčních programových balíčků využívajících zejména explicitní algoritmy výpočtu, jako je např. PAM CRASH, Ansys Explicit, Abaqus a jiné nemusí nutně tato kritéria ověřovat, neboť konečné prvky v jejich knihovnách, již požadovaná kritéria konvergence při odpovídající vytvořené síti splňují. Přesto při kombinaci různých prvků, jako bylo provedeno u II. kontinuálního modelu se strukturní jednotkou, je nutno dbát na základní pravidla konvergence tj. za 1) na hranici mezi prvky i uvnitř musí aproximované posuvy splňovat minimální požadavky spojitosti, závislé na typu úlohy (statická, kvazistatická, dynamická), 2) při posuvu prvku jako tuhého celku (např. čelisti, tuhé desky) musí zůstat napětí a přetvoření v prvku nulová, 3) vybraný prvek musí být schopen popsat deformaci a napětí. Musí se také s vyšší pozorností a inženýrským nadhledem sledovat ovlivnění konvergence (může docházet k narušení stability výpočtu) vlivem propojování prvků s různým počtem uzlů nebo prvky s různými deformačními parametry a stanovovat přibližný odhad chyby výpočtu. Odhad chyby konkrétního výpočtu při daném typu prvku a diskretizaci sítě lze definovat, jako diskretizační chybu, jenž vyjadřuje chybu řešení spojitěho problému numerickým výpočtem. Jedná se o chybu, jenž vychází z chyby energie napjatosti  $i$ -tého prvku  $e_i$  (2.5.10), která je mírou diskontinuity numericky získaných napětí mezi prvky (spojité posuvy, ale nespojitě napětí) a dodatečné aproximace zprůměrováním uzlových hodnot napětí, kterými přispívají do vybraného uzlu daného prvku sousední prvky. Celkovou energetickou chybu modelu  $e$  lze vyjádřit vztahem (2.5.11), jenž je následně součtem dílčích chyb jednotlivých prvků. Celková energetická chyba může být dále vztažena k celkové energii napjatosti  $\Theta$  výpočetního modelu podle vztahu (2.5.12).

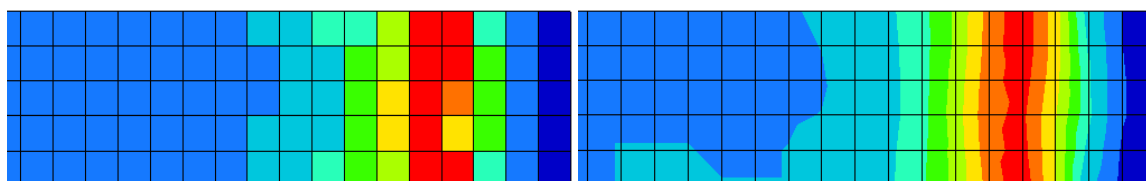
$$e_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \Delta \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \cdot \Delta \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (2.5.10)$$

$$e = \sum_{i=1}^n e_i, \quad (2.5.11)$$

$$e^\Theta = 100 \sqrt{\frac{e}{\Theta + e}}, \quad (2.5.12)$$

kde  $\Delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^i - \boldsymbol{\sigma}^a$  je rozdíl mezi primárním nespojitým výsledkem napětí  $\boldsymbol{\sigma}^i$  a dodatečným aproximovaným napětím  $\boldsymbol{\sigma}^a$ ,  $\mathbf{D}$  je matice elastických konstant,  $e^\Theta$  je celková energetická chyba vztažená k celkové energii napjatosti  $\Theta$ , která je počítaná z neaproximovaných průběhů napětí a přetvoření.

Výsledné rozložení primárního nespojitého napětí  $\sigma^i$  a dodatečného aproximovaného napětí  $\sigma^a$  je uvedeno na obr. 2.5.6. Z porovnání rozložení napětí je patrná rozdílnost velikosti napětí v jednotlivých elementech (červená barva největší napětí, modrá barva nejmenší napětí), kde je patrné, že aproximováním se napětí v modelu sníží a zaujímá menší oblast, resp. přechází zejména do uzlových bodů na hranici mezi nejvíce zatíženými elementy. Proto je důležité klást zvýšenou pozornost nad vyhodnocováním výsledků modelové simulace, zejména v oblastech největšího napětí.



**Obr. 2.5.6.** MKP model: primární nespojité napětí (vlevo), aproximované napětí (vpravo).

Chyba výpočtu modelové simulace je ovlivněna výše uvedenými parametry (okrajové podmínky, velikost a typ elementu, atd.) a neměla by pro takto složité modely kompozitních struktur přesahovat hodnotu  $\leq 15\%$ . V řadě literatur se doporučuje pracovat s chybou do  $9\%$ , jak uvádí např. [15]. Celková chyba se také projevuje do velikosti časového kroku výpočtu  $\Delta t$  definovaného podle (2.5.9), který v průběhu modelové simulace se může měnit a přecházet v  $\Delta t^{krit}$  a výrazně tak zvýšit dobu výpočtu. Hodnoty chyby výpočtu i kritického časového kroku pro obě simulace vzorků kompozitní struktury jsou uvedeny v tab. 2.5.3.

**Tab. 2.5.3.** Velikost chyby výpočtu a kritického časového kroku numerické simulace vzorků kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny.

Model	Typ elementu nejvíce ovlivňující $\Delta t^{crit}$	Velikost nejmenšího elementu [mm]	Počet elementů	Časový krok $\Delta t^{crit}$ [s]	Chyba [%]
I. Kontinuální model	2D Shell	1	1000	$5,297 \cdot 10^{-3}$	5
II. Kontinuální model se strukturní jednotkou	3D Brick	0,002	22890	$0,1392 \cdot 10^{-7}$	9

### 2.5.3 Výsledky a porovnání MKP simulací s analytickými modely a měřením

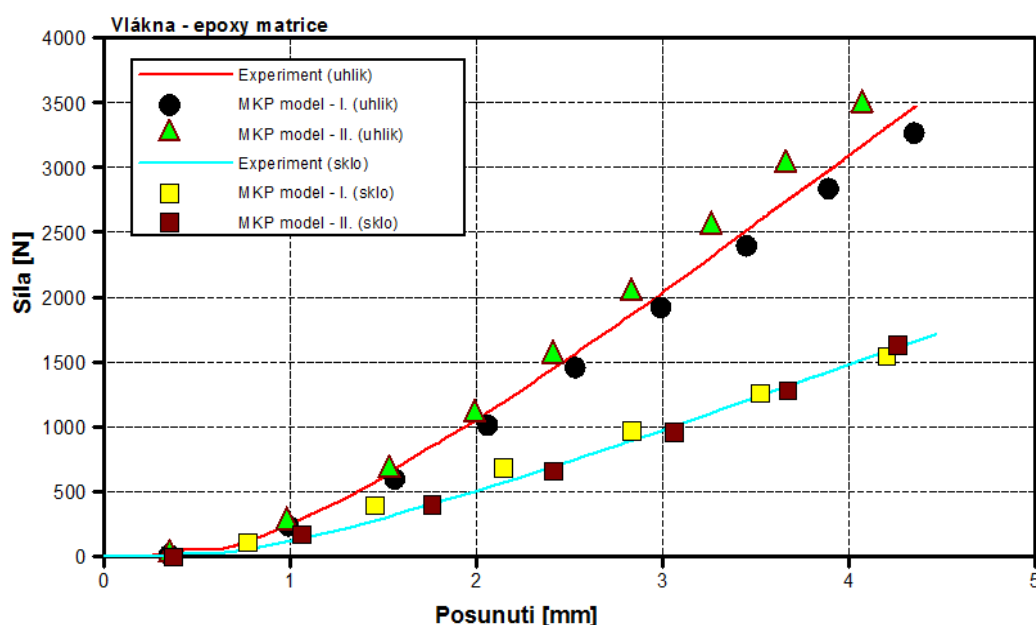
Byly provedeny dvě numerické simulace kompozitního vzorku s podélně uspořádanými vlákny, tj. I. kontinuálního modelu a II. rozšířeného kontinuálního modelu se strukturní jednotkou. Výsledky obou numerických simulací měly přibližně stejné hodnoty napětí při definovaném přetvoření  $\varepsilon_i = 1\%$  při tahovém zatížení do požadovaného směru pro danou vláknennou výztuž (uhlík nebo sklo). Výsledné závislosti síly na posunutí (deformaci) vzorků získané z modelů stanovily přibližně lineární závislost, a to jak u kompozitních vzorků vyztužených uhlíkovými vlákny, tak i u vzorků

vyztužených skleněnými vlákny. Na obr. 2.5.7 je uveden průběh tahové zkoušky při objemovém zaplnění  $V^f = 0,3$ , kde kompozitní vzorek vyztužený uhlíkovými vlákny s epoxidovou matricí má přibližně 2,2–krát větší silovou odezvu v porovnání s kompozitním vzorkem vyztuženým skleněnými vlákny s epoxidovou matricí. Podobná tahová závislost byla patrná i u jiných zaplnění. V porovnání s průměrovanými hodnotami získanými z experimentálních vzorků, ukazují numerické simulace podobný trend závislosti síly na přetvoření (obr. 2.5.7), přičemž výsledky získané ze simulací byly také testovány pomocí statistické metody ANOVA. Výsledky získané ANOVOU na hladině významnosti 0,05 jsou uvedeny v tabulce 2.5.4. Z výsledků statistické analýzy je zřejmé, že výsledky získané z numerických modelů jsou statisticky významné, a mohou být použity pro popis mechanického chování kompozitních vzorků vyztužených dlouhými vlákny při tahové zkoušce.

**Tab. 2.5.4.** Statistická analýza MKP modelů a experimentálních vzorků kompozitů vyztužených dlouhými vlákny.

Model	$F_{rat}$ [-]	$P_{hodnota}$ [-]	$F_{krit}$ [-]	$R^2$ [-]
I. Kontinuální model	0,367	0,534	2,671	0,981
II. Kontinuální model se strukturní jednotkou	0,118	0,967	2,853	0,967

Kde  $F_{rat}$  je hodnota  $F$  - testu,  $P_{hodnota}$  je hladina významnosti, na které hypotéza o rovnosti modelu s experimentem může být zamítnuta,  $F_{krit}$  je kritická hodnota porovnání modelu s experimentem,  $R^2$  koeficient determinace.



**Obr. 2.5.7.** Porovnání výsledků experimentů a MKP modelů: průběhu síly v závislosti na posunutí vzorku.



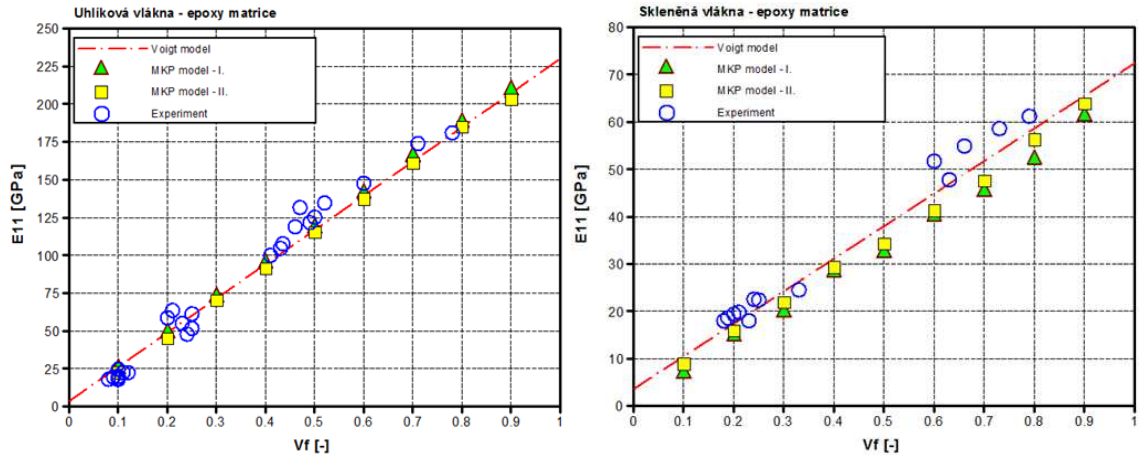
V následujících grafech (obr. 2.5.8 – 2.5.12) jsou stanoveny průběhy hodnot elastických konstant  $E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{23}$ , v závislosti na objemovém zaplnění  $V^f$ . V grafech jsou porovnány MKP modely nejen s experimenty, ale také s analytickými modely uvedenými v kap. 2.4. Z výsledných průběhů je patrné, že závislost  $E_{11}$  pro kompozitní vzorek s uhlíkovými i skleněnými vlákny má v obou případech přibližně lineární průběh (obr. 2.5.8), což odpovídá Voigtovu modelu podle vztahu (2.4.2). Hodnoty pro  $V^f = 0,1 - 0,9$  dosahují velikosti pro  $E_{11}^{uhlík, epoxy} \approx 25 - 215 GPa$  a pro  $E_{11}^{sklo, epoxy} \approx 10 - 65 GPa$ . Závislost  $E_{22}$  je rozdílná pro kompozitní vzorek s uhlíkovými a skleněnými vlákny (obr. 2.5.9), zatímco pro vzorek s uhlíkovými vlákny závislost je přibližně lineární, tak pro vzorek se skleněnými vlákny je průběh nelineární resp. exponenciální. Z obr. 2.5.9 je také viditelné, že nelze pro vzorky s uhlíkovými vlákny využít libovolné typy analytických modelů, resp. v celém rozsahu  $V^f = 0,1 - 0,9$ . Je patrné, že Modifikovaný model definovaný vztahem (2.4.6) od hodnoty  $V^f = 0,7$  roste exponenciálně, což neodpovídá provedeným experimentům. Pro stanovení  $E_{22}$  pro jednotlivé objemové zaplnění  $V^f$  má odpovídající průběh Chamisův model podle vztahu (2.4.10). Hodnoty pro  $V^f = 0,1 - 0,9$  dosahují velikosti pro  $E_{22}^{uhlík, epoxy} \approx 5 - 13,5 GPa$  a pro  $E_{22}^{sklo, epoxy} \approx 5 - 38 GPa$ . Závislost  $G_{12}$  má exponenciální průběh pro kompozitní vzorek s uhlíkovými a skleněnými vlákny (obr. 2.5.10), kde je patrné, že u vzorků se skleněnými vlákny velmi dobře korespondují analytické modely s experimenty i numerickými modely, ale u vzorků s uhlíkovými vlákny se průběhy stanovené analytickými modely trochu rozcházejí. Příkladem lze uvést Bridgingův model definovaný vztahem (2.4.13), který je velmi vhodný pro popis  $G_{12}$  kompozitních vzorků vyztužených skleněnými vlákny, ale nelze ho vhodně využít pro popis  $G_{12}$  kompozitních vzorků vyztužených uhlíkovými vlákny. Hodnoty pro  $V^f = 0,1 - 0,9$  dosahují velikosti pro  $G_{12}^{uhlík, epoxy} \approx 2 - 13 GPa$  a pro  $G_{12}^{sklo, epoxy} \approx 2,8 - 14 GPa$ . Závislost  $G_{23}$  nelze vhodně experimentálně stanovit a proto je vhodné pro stanovení  $G_{23}$  vycházet z numerických a analytických modelů. Z obr. 2.5.11 je patrné, že porovnané výsledné průběhy se rozcházejí, zatímco u vzorků kompozitů se skleněnými vlákny rozdíl není významný, tak u vzorků vyztužených uhlíkovými vlákny se významně rozcházejí v porovnání i vytvořené numerické modely. Pakliže se vyjádří střední hodnota z průběhů analytických a numerických modelů, pak hodnoty pro  $V^f = 0,1 - 0,9$  dosahují velikosti  $G_{23}^{uhlík, epoxy} \approx 1,5 - 4,5 GPa$  a pro  $V^f = 0,1 - 0,7$  je  $G_{23}^{sklo, epoxy} \approx 1,5 - 6,5 GPa$ . Průběhy Poissonových čísel  $\nu_{12}$  a  $\nu_{23}$  v závislosti na  $V^f$  jsou uvedeny na obr. 2.5.12. Pro stanovení hodnot  $\nu_{12}$  lze využít Voigtova modelu podle vztahu (2.4.3), který je ve velmi dobré shodě s numerickými modely (obr. 2.5.12 vlevo). Z výsledků je charakteristické, že pro  $V^f = 0,1 - 0,9$  je  $\nu_{12}^{uhlík, epoxy} \approx 0,34 - 0,28$  a  $\nu_{12}^{sklo, epoxy} \approx 0,33 - 0,23$ . Pro stanovení hodnot  $\nu_{23}$  lze pro změnu využít Pružně-elastického modelu podle vztahu (2.4.22), jenž pro  $V^f = 0,1 - 0,9$  dosahuje hodnot pro  $\nu_{23}^{uhlík, epoxy} \approx 0,62 - 0,71$  a pro  $\nu_{23}^{sklo, epoxy} \approx 0,47 - 0,58$ . Stanovené hodnoty elastických konstant v závislosti na velikosti



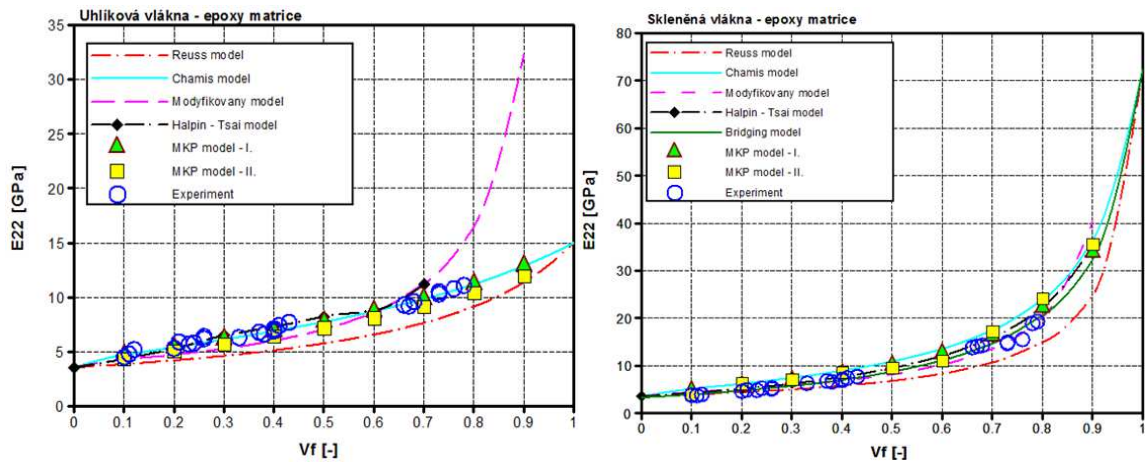
objemového zaplnění  $V_f$  vzorků kompozitní struktury vyztužené podélně kladenými vlákny jsou uvedeny v tab. 2.5.5. Hodnoty jsou stanovené ze zprůměrovaných výsledných hodnot MKP modelů. Tyto hodnoty budou následně využitelné pro vstupní mechanické parametry pro numerické simulace celých rámců vyztužených dlouhými vlákny.

**Tab. 2.5.5.** Stanovené elastické konstanty z MKP modelů příčně izotropní kompozitní struktury s vybranými vlákennými výztužemi a epoxidovou matricí.

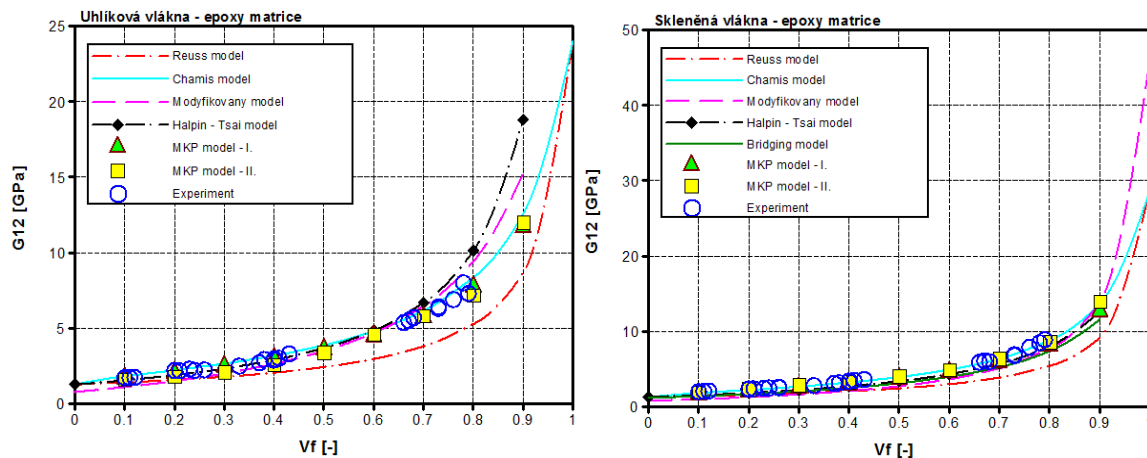
	Příčně izotropní kompozit s epoxidovou matricí vyztužený uhlíkovými vlákny						Příčně izotropní kompozit s epoxidovou matricí vyztužený skleněnými vlákny					
$V_f$ [%]	$E_{11}$ [GPa]	$E_{22}$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$G_{23}$ [GPa]	$\nu_{12}$ [-]	$\nu_{23}$ [-]	$E_{11}$ [GPa]	$E_{22}$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$G_{23}$ [GPa]	$\nu_{12}$ [-]	$\nu_{23}$ [-]
10	24,2	4,8	2,1	1,4	0,334	0,56	8,8	4,8	1,8	1,74	0,329	0,48
20	49,8	5,2	2,3	1,57	0,331	0,68	16,1	5,4	2,2	2,21	0,319	0,53
30	74,7	6,7	2,5	2,06	0,321	0,67	22,7	6,3	2,6	2,67	0,31	0,54
40	96,9	7,1	3,1	2,52	0,317	0,69	29,2	8,4	3,1	3,23	0,289	0,52
50	122,1	7,7	3,8	2,89	0,312	0,7	34,3	9,9	4	4,02	0,279	0,54
60	145,8	8,2	4,9	3,32	0,306	0,68	42,2	12,2	4,7	5,24	0,267	0,53
70	166,1	9,8	6,1	3,53	0,296	0,69	47,9	18,3	5,9	7,07	0,258	0,534
80	188,7	11,7	7,6	4,04	0,287	0,68	55,3	24,2	8,6	8,1	0,242	0,53
90	212,6	12,4	12,3	4,41	0,281	0,58	63,6	35,1	13,9	12,7	0,23	0,51



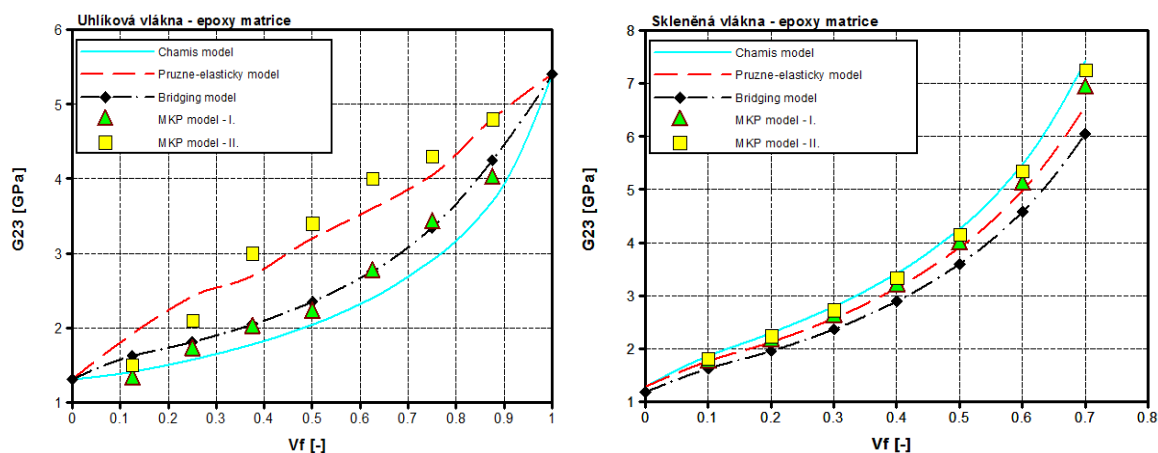
**Obr. 2.5.8.** Výsledné průběhy  $E_{11}$  v závislosti na  $V_f$  vzorků příčně izotropních kompozitů s epoxidovou matricí a uhlíkovými vlákny (vlevo) a skleněnými vlákny (vpravo).



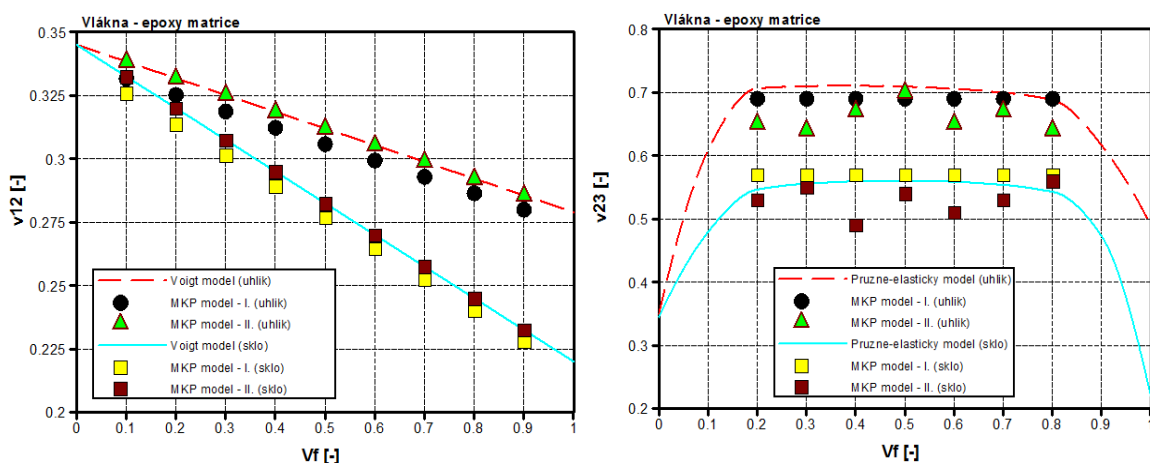
**Obr. 2.5.9.** Výsledné průběhy  $E_{22}$  v závislosti na  $V_f$  vzorků příčně izotropních kompozitů s epoxidovou matricí a uhlíkovými vlákny (vlevo) a skleněnými vlákny (vpravo).



**Obr. 2.5.10.** Výsledné průběhy  $G_{12}$  v závislosti na  $V_f$  vzorků příčně izotropních kompozitů s epoxidovou matricí a uhlíkovými vlákny (vlevo) a skleněnými vlákny (vpravo).



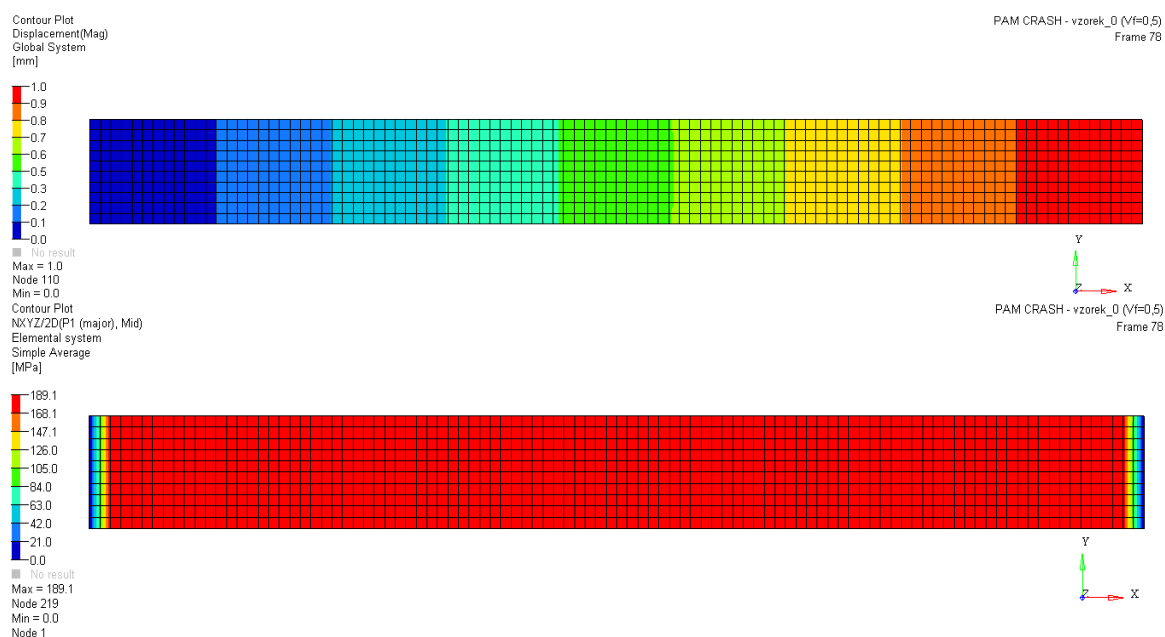
**Obr. 2.5.11.** Výsledné průběhy  $G_{23}$  v závislosti na  $V_f$  vzorků příčně izotropních kompozitů s epoxidovou maticí a uhlíkovými vlákny (vlevo) a skleněnými vlákny (vpravo).



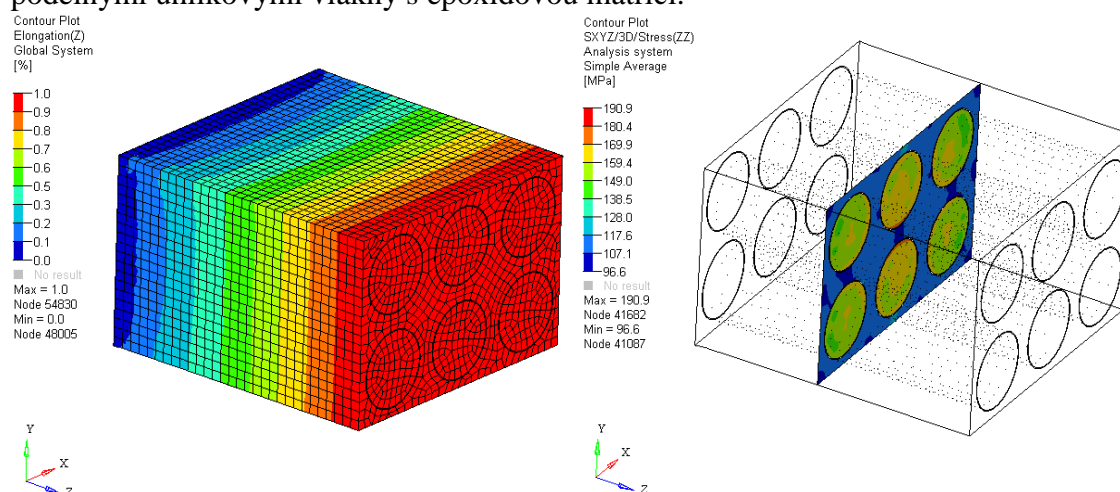
**Obr. 2.5.12.** Výsledné průběhy  $\nu_{12}$  (vlevo) a  $\nu_{23}$  (vpravo) v závislosti na  $V_f$  vzorků příčně izotropních kompozitů s epoxidovou maticí a uhlíkovými vlákny a skleněnými vlákny.

Ze získaných výsledků uvedených na obr. 2.5.8 – 2.5.12 lze vyvodit, že kontinuální model (MKP model – I) má přibližně ustálený monotónní průběh projevující se nejen spojitým rozložením deformace (obr. 2.5.13 nahoře), ale také rovnoměrným rozložením hlavního napětí  $\sigma^I = \sigma_{11}$ , jenž působí v hlavním směru zatížení (obr. 2.5.13 dole). Z tohoto hlediska i vzhledem k jednoduchosti modelu se MKP model I. jeví jako velmi vhodný pro stanovení mechanických vlastností vzorků kompozitních struktur a jejich optimalizace. Takovýto model však nic nevypoví o přetvoření a napětí mezi vlákny a maticí, natož na mezifázovém rozhraní. Kontinuální model se strukturní jednotkou (MKP model II.) je sice výrazně složitější a pro některé elastické konstanty jeho výsledný průběh není monotónní ( $G_{23}, \nu_{23}$ ) resp. výsledná závislost není ustálená a nemusí být dostatečně přesná, zato z hlediska výsledků je komplexnější. MKP model II. umožňuje přiblížit rozložení přetvoření strukturní jednotky v hlavním směru zatížení (osa Z), jak je znázorněné na obr. 2.5.14 vlevo a také rozložení hlavního napětí. Hlavní napětí lze

stanovit v izoplochách nebo v sekvenčních řezech (obr. 2.5.14 vpravo), které umožňují analyzovat rozložení napětí mezi vlákny i matricí včetně mezifázového rozhraní. Porovnáním maximálních hodnot napětí 189,1 MPa resp. 190,9 MPa uvedených na obr. 2.5.13 a obr. 2.5.14 v časovém okamžiku stejného přetvoření  $\varepsilon_{11} = 1\%$  a při stejném objemovém zaplnění  $V^f = 0,5$  lze konstatovat, že modely mají významnou shodu. Tuto shodu ovlivňují nejen stejné materiálové parametry, okrajové podmínky, ale také vhodně zvolené typy elementů sítě konečných prvků, jak bylo diskutováno dříve.



**Obr. 2.5.13.** Výsledné rozložení celkové deformace (nahore) a hlavního napětí působícího ve směru osy zatížení (dole) MKP modelu I. vzorku kompozitu vyztuženého podélnými uhlíkovými vlákny s epoxidovou matricí.



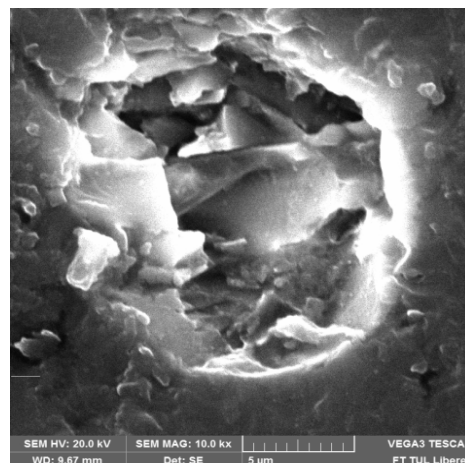
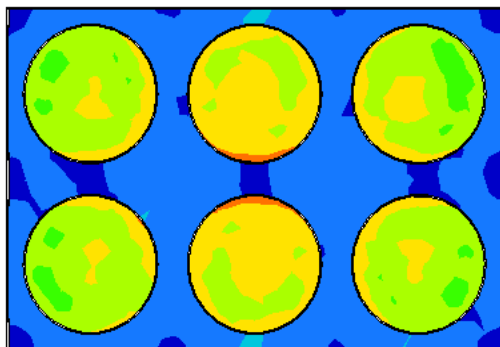
**Obr. 2.5.14.** Výsledné rozložení osového přetvoření (vlevo) a hlavního napětí působícího ve směru osy zatížení (vpravo) MKP modelu II. vzorku kompozitu vyztuženého podélnými uhlíkovými vlákny s epoxidovou matricí.

MKP model II. vzorku kompozitní struktury vyztužené podélnými vlákny s epoxidovou matricí je na vytvoření složitější a také časová náročnost výpočtu je v porovnání

s MKP modelem I. větší. Nutno však dodat, že z II. MKP modelu jsou patrné cenné vědecké poznatky o přibližném rozložení maximálního napětí mezi vlákny a maticí, jenž je největší právě v mezifázovém rozhraní (obr. 2.5.15 vlevo). Potvrzuje to teoretický předpoklad o systémovém mechanismu (vlákno – matrice – mezifázové rozhraní), kde největší napětí přenáší nová vzniklá složka tj. mezifázové rozhraní, což způsobuje synergický efekt výsledné konstrukce z kompozitní struktury. Z obr. 2.5.15 jsou také patrné poznatky, tj. MKP model II. znázorňuje v řezu nerovnoměrné maximální napětí v kompozitní struktuře (na rozdíl od MKP modelu I.) a také stanovuje, že na maximálním napětí se podílejí ve strukturní jednotce jen dvě vlákna (místo 6 ve strukturní jednotce), což z fyzikálního principu bude snižovat maximální synergický efekt, který teoreticky v konstrukci kompozitu může nastat. Rozložení mezifázového rozhraní v numerickém modelu a v reálném měření je patrné z obr. 2.5.15. Je nutné doplnit, že z analýz provedených prostřednictvím měření na reálných vzorcích bylo prakticky ve všech případech patrné, že identifikace mezifázového rozhraní je nejen složitá, ale také vlivem technologického procesu může být neidentifikovatelná, resp. nemusí vůbec mezi vláknem a maticí vzniknout (viz obr. 2.1.3, kap. 2.1). Je tedy otázkou, jak vhodně identifikovat mezifázové rozhraní a jak vhodně mezifázové rozhraní měřit, jednak pro verifikaci numerických modelů a jednak pro stanovení statistického vyhodnocení kolik vůbec vláken (jaké procento) v kompozitní struktuře přispívá k synergickému efektu.

Contour Plot  
SXYZ/3D/Stress(ZZ)  
Analysis system  
Simple Average  
[MPa]

190.9  
180.4  
169.9  
159.4  
149.0  
138.5  
128.0  
117.6  
107.1  
96.6  
■ No result  
Max = 190.9  
Node 41682  
Min = 96.6  
Node 41087



**Obr. 2.5.15.** Výsledné rozložení hlavního napětí působícího ve směru osy zatížení s maximálním napětím v mezifázovém rozhraní po obvodu (vlevo), reálný vzorek s patrným mezifázovým rozhraním (vpravo).

## 2.5.4 Shrnutí poznatků z MKP simulací vytvořených pro studii a analýzu mechanických vlastností vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny

Vytvořené numerické modely tj. I. kontinuální model a II. rozšířený kontinuální model se strukturní jednotkou byly v porovnání s reálnými experimenty v dobré shodě (obr. 2.5.7 a tab. 2.5.4). Z numerických modelů lze stanovit rozložení napětí a přetvoření v daném časovém intervalu při zvoleném objemovém zaplnění  $V^f$  a také stanovit elastické konstanty  $E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{23}$ , které jsou důležité pro vstupní

materiálové parametry pro numerické modelování celých rámců. Průběhy elastických konstant bylo nutné v některých případech porovnávat jen s analytickými modely, neboť neznámé konstanty  $G_{23}, \nu_{23}$  nelze vhodně měřit. Celkově lze shrnout, že I. kontinuální model je pro vytvoření numerické simulace uživatelsky přijatelnější a je vhodný pro popis velikosti hlavních napětí, ale neumožňuje analyzovat a studovat problematiku na mikroúrovni. Tedy neumožňuje studovat rozložení interakce vlákna s matricí resp. vznik mezifázového rozhraní, což lze přibližně provést podstatně složitějším II. rozšířeným kontinuálním modelem se strukturní jednotkou.

## 2.6 Závěr kapitoly

V kapitole 2 byly uceleně přiblíženy studie, analýzy a numerické simulace mechanických vlastností vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny, které byly důležité provést za účelem získání vstupních parametrů pro numerické simulace konstrukcí rámců z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny.

Byly provedeny řady studií a experimentů se vzorky vyztuženými uhlíkovými nebo skleněnými vlákny (kap. 2.1 – 2.3), jejichž mechanické vlastnosti z nich umožňují vytvářet konstrukční výztuže pro kompozitní konstrukce. V kapitole 2.4 jsou uvedeny analytické modely s matematickými vztahy (např. Voigtův, Reussův či Chamis model), které umožňují stanovit neznámé elastické konstanty  $E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{23}$  vzorku výsledné kompozitní struktury. Závěrem je přiblížena problematika vytvoření numerického modelu vzorku kompozitní vlákenné struktury pro stanovení mechanických vlastností (kap. 2.5), a to jak prostřednictvím popisu obecného kontinua, tak komplexnějšího numerického modelu se strukturním uspořádáním umožňující přiblížit vzájemnou interakci vlákna a matrice. Výsledky numerických modelů (obr. 2.5.8 – 2.5.12) stanovily cenné poznatky a informace, včetně stanovení elastických konstant, které byly následně vyhodnoceny v tab. 2.5.5.

Tyto výsledky budou dále využity při modelování celých rámců pro optimalizace konstrukčního řešení, jak bude uvedeno v následující kapitole.

## Kapitola 3

# KONSTRUKCE A OPTIMALIZACE RÁMŮ VYVÍJENÝCH Z KOMPOZITNÍCH STRUKTUR VYZTUŽENÝCH DLOUHÝMI VLÁKNY

Obsahem kapitoly je přiblížení konstrukčního řešení rámu případně rámových konstrukcí vyvíjených z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny. V úvodu je nejprve přiblížena problematika konstrukčního řešení a jsou uvedeny vybrané principy technologie výroby rámu z kompozitu. Dále je diskutováno konstrukční řešení navíjení vláken na geometrii jádra rámu mechanickým i automatizovaným způsobem v laboratorních podmínkách. Následuje rozsáhlejší popis optimalizace rámu vyvíjeného z kompozitní struktury prostřednictvím numerického modelování, počínaje matematickým popisem vinutí vláken na prostorovou geometrii jádra, přes tvorbu CAD modelu s parametrickými rovnicemi, až po vytvoření pokročilé MKP simulace umožňující analyzovat napětí a deformace v rámu. Závěrem je krátce uvedena výroba rámu a přiblížena problematika měření pro stanovení a porovnání mechanických vlastností vyrobených rámových konstrukcí pro dané zatížení.

### 3.1 Problematika konstrukčního řešení rámu vyvíjených z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny

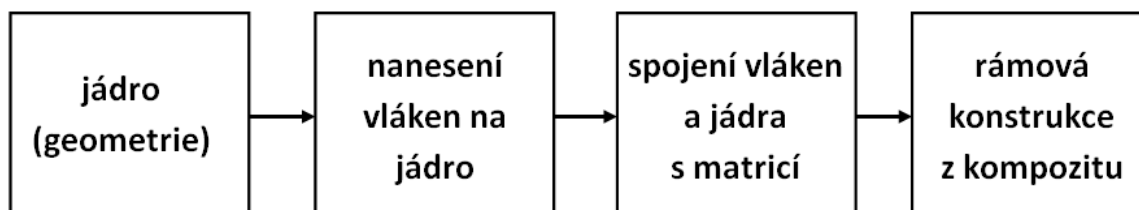
Geometrické tvary rámu a obecně rámových konstrukcí vyvíjených z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny mohou být v současné době aplikovány v nespočetné řadě technických aplikací (průmyslových i společenských), vzhledem ke své vysoké specifické pevnosti při nízké hmotnosti, jak bylo přiblíženo v úvodní kapitole. Zejména se jedná o konstrukční řešení s velmi efektivním využitím materiálových vlastností. Samotné výsledné řešení rámu je však ovlivněné způsobem a možnostmi výrobní technologie, tedy principem jakým vůbec lze zkonstruovat rám z kompozitní struktury. **Technologie výroby rámu** je poměrně složitý problém, jehož základní princip spočívá v tom, že na libovolné geometrické tvary – **jádra** (otevřená, či uzavřená)<sup>(24)</sup> jsou

---

<sup>(24)</sup> Pozn. Jádra mohou být **nosná** či **nenosná**. Nosné jádro může částečně či plně přispívat k mechanickým vlastnostem výsledné kompozitní struktury (příspěvek do pevnosti výsledné konstrukce bude podstatně větší než 10%), tj. jádro bude mít materiálové vlastnosti s odpovídající pevností a tuhostí (např. jádro z tenkostěnné oceli, tvrzené plasty, atd.). Naopak nenosné jádro téměř nepřispívá k mechanickým vlastnostem kompozitní struktury (příspěvek bude menší než 10%), tj. jádro bude mít materiálové vlastnosti s minimální pevností a tuhostí v porovnání s výslednou kompozitní strukturou a bude sloužit jen k tvarové geometrii výsledného rámu (např. PU jádro, polystyrenové jádro, dřevěné jádro, atd.). Snahou je pro finální konstrukční řešení využít nejen jádra, ale i vláken a matrice s co nejnižší měrnou hmotností.

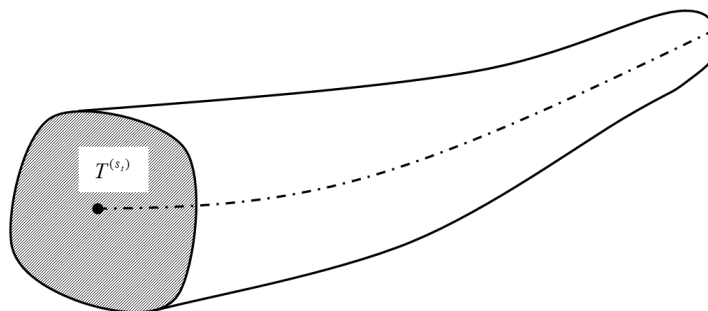


nanesena **vlákna** (ručně nebo automaticky <sup>(25)</sup>) a spojena s **matricí** (matrice může být na vlákna nanesena v odpovídajícím množství ve vstřikovacím lisu, či nanesena prostřednictvím smočení, nebo může být přímo na vlákna chemicky impregnována, již při výrobě vláknenných pramenců). Pro odpovídající spojení matrice s vlákny a jádrem potřebujeme dostatečný tlak, teplotu, ale i odpovídající hustotu matrice <sup>(26)</sup>. Základní princip výroby rámu vyvíjeného z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny je schematicky uveden na obr. 3.1.1.



**Obr. 3.1.1.** Základní princip výroby vyvíjeného rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny.

Rámem, pro který chceme navrhnout optimální vývojové řešení budeme nazývat každé těleso s danou geometrií, které je definováno určitou křivkou tzv. střednicí, přičemž v každém bodu střednice lze stanovit  $i$  –  $tý$  rovinný průřez, jehož těžiště  $T^{(s_i)}$  leží zpravidla právě na střednici (obr. 3.1.2).



**Obr. 3.1.2.** Rám vyvíjený z kompozitní struktury vyztužený dlouhými vlákny s definovanou střednicí a rovinným průřezem.

Takovýto rám či rámová konstrukce může být:

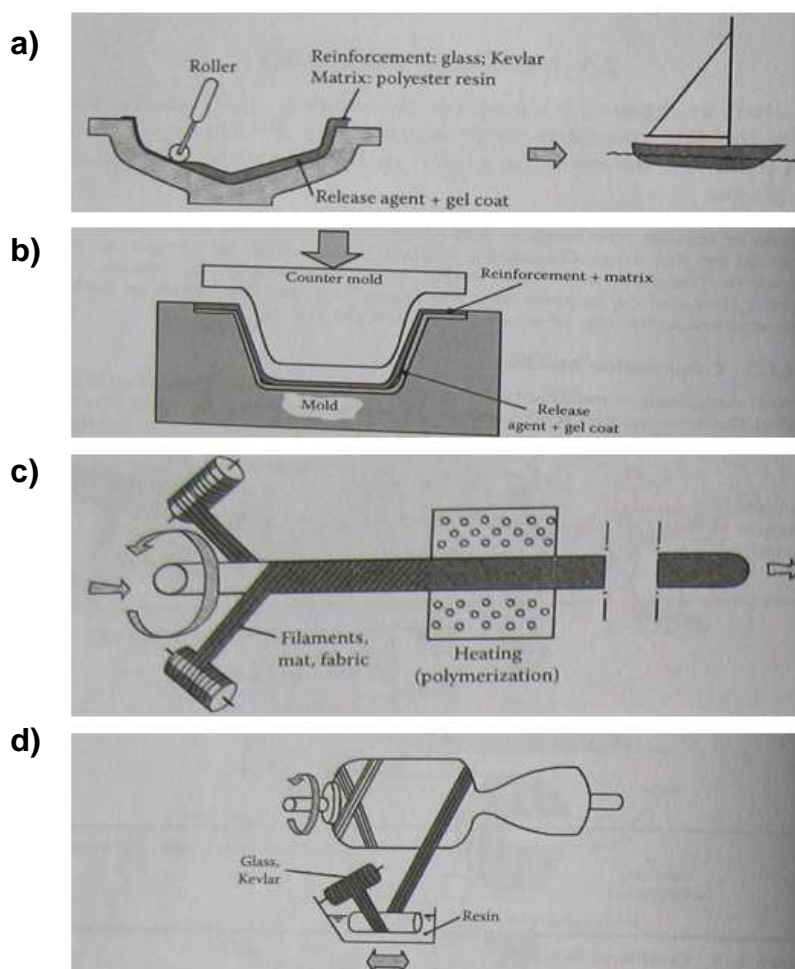
1. **Přímá**, je-li střednice přímka (např. rovné pruty, nosníky).
2. **Křivá**, je-li střednice částí rovinné nebo prostorové křivky.

<sup>(25)</sup> V současné době, která je specifická výrobou s plně automatickými výrobními linkami, se přesto téměř pořád nanášejí vlákna na jádro ručně kladením do připravené formy ve vstřikovacím lisu, kde dojde ke smísení s matricí. Prakticky se jedná o manuální výrobu. Je nutné však uvést, že zejména pro otevřené rámové konstrukce je využíváno automatického kladení vláken např. ovíjením.

<sup>(26)</sup> Spojení matrice s vlákny a vytvoření kompozitní struktury může být provedeno jako výroba např. termoplastů, reaktoplastů nebo termosetů.



Jestliže se jedná o otevřený rám, bude počáteční a koncový bod střednice vymezen dvěma průřezy (stejnými či rozdílnými), v případě uzavřeného rámu, bude střednice uzavřenou křivkou. Komplexní problém vývojového řešení rámu je však v první řadě problémem samotného způsobu nanesení vláken na jádro. Je řada známých řešení a principů nanesení vlákenné výztuže na jádro jako např. kontaktní nanášení vláken kladičkou (obr. 3.1.3a), kompresní tvarování (obr. 3.1.3b), či vlákna navíjená z cívky při rotaci geometrie jádra budoucího rámu (obr. 3.1.3c,d).



**Obr. 3.1.3.** Vybrané možnosti způsobu nanesení vlákenné výztuže na profilovou geometrii jádra rámu (zdroj: Gay a Gambelin [5]).

Uvedené a i jiné způsoby nanesení vlákenné výztuže na profilovou geometrii jádra jsou inspirativní, ale principiálně jejich aplikace má vždy nějaké konstrukční omezení pro definované rámy podle obr. 3.1.2. Například způsoby uvedené podle obr. 3.1.3c,d, kdy jsou vlákna navíjena na geometrie rotujícího jádra rámu, které je uložené v ložiskách, jsou obecně omezeny, jen pro otevřené rámy a způsoby na obr. 3.1.3a,b jsou navíc limitovány geometrií profilu jádra (složitě profily konvexního a konkávního tvaru). Také tyto způsoby jsou obecně využitelné pouze pro konstantní (pravidelné) nanášení vláken bez odpovídající optimalizace kladení vláken, kterou by bylo možno řídit všechny 3 osy zatěžování. Vzhledem k těmto skutečnostem je důležité rozšířit tyto způsoby nanášení vlákenné výztuže o nové principy konstrukčního řešení, které by umožňovalo

odpovídající flexibilitu resp. prostorovou optimalizaci nanášení vlákenné výztuže na geometrii jádra.

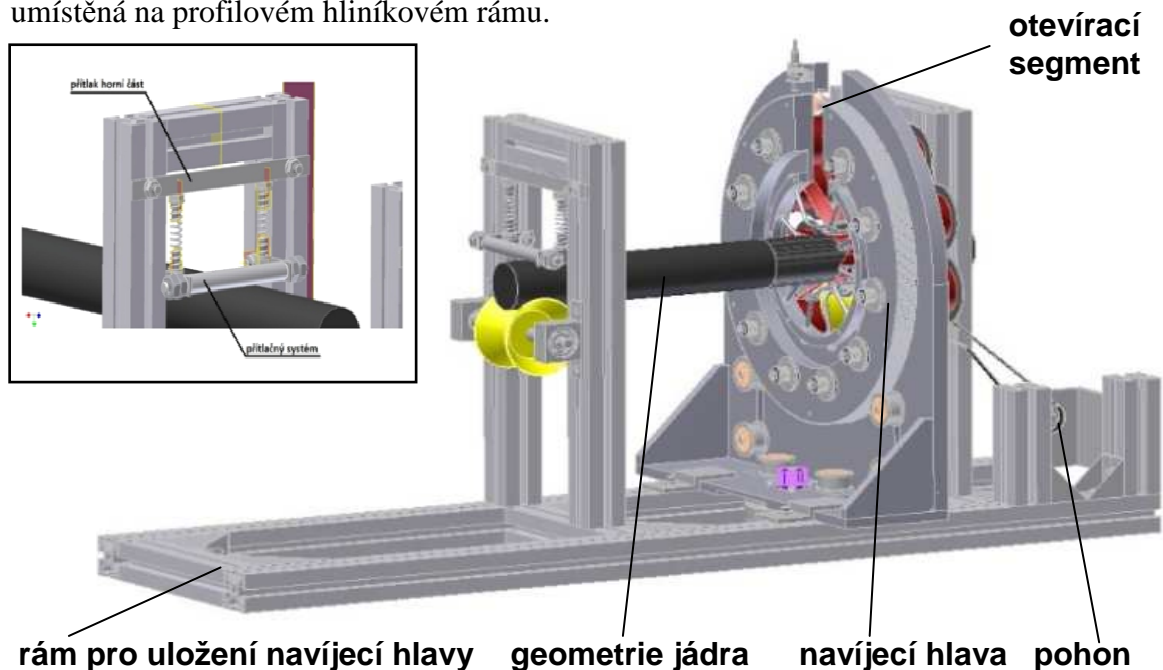
## 3.2 Konstrukční řešení navíjení vláken na geometrii jádra rámu

Konstrukční řešení by mělo směřovat k možnosti vhodně optimalizovat navíjení vlákenné výztuže na geometrii jádra vzhledem k požadovaným fyzikálním a mechanickým vlastnostem výsledného rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny. Proto pro výrobu byla vyvíjena prototypová technologie ovíjení vlákenné výztuže na jádro, která by umožnila vytvořit kompozitní rám s optimalizovaným množstvím vláken (Ševčík, Tůma, Petrů, Martinec a Kovář [41]). Základní princip vývojového řešení spočívá v ovinutí jádra definovaného profilu řízeně kladenými vlákny (směrové uspořádání vláken, množství a typ vláken), kde vlákna budou navíjena, tak aby umožnila zajistit pevnost ve všech osách působícího hlavního napětí. Vlákna ovinutý rám se poté umístí do vstřikovací formy pro následné spojení s matricí a vytvoření kompozitní struktury v souladu s postupem uvedeným na obr. 3.1.1. Takto vyrobený rám bude připravený pro testování mechanických vlastností ve všech osách zatížení. Samotné vývojové řešení lze **navrhnout z ovíjecího zařízení tvořeného hlavou pro nanášení vláken**, na které budou uloženy cívky s vlákny v požadovaném i - počtu cívek. Navíjecí hlava bude plnit funkci pravidelného rotačního pokládání vláken na jádro, které bude procházet středem hlavy, přičemž jádro nebude rotovat, jako v případě obr. 3.1.3c,d. Zároveň osa rotace hlavy bude totožná se střednicí jádra. Dále bude ovíjecí zařízení doplněno o úchopné části pro držení jádra, které umožní pohyb jádra při průchodu hlavou definovanou rychlostí. Definovaným poměrem rychlosti rotace hlavy a rychlosti průchodu jádra hlavou budou vlákna pokládána s požadovaným množstvím a pod požadovanou úhlovou orientací vláken. Tento princip umožní vyvinout konstrukční řešení navíjecího systému, které bude umožňovat pokládání podélných vláken pod úhlem  $0^\circ$  (cívka se odvíjí, ale hlava nerotuje) nebo pod určitým úhlem např. úhlem  $+30^\circ$  či  $-60^\circ$  (cívka se odvíjí a zároveň hlava rotuje).

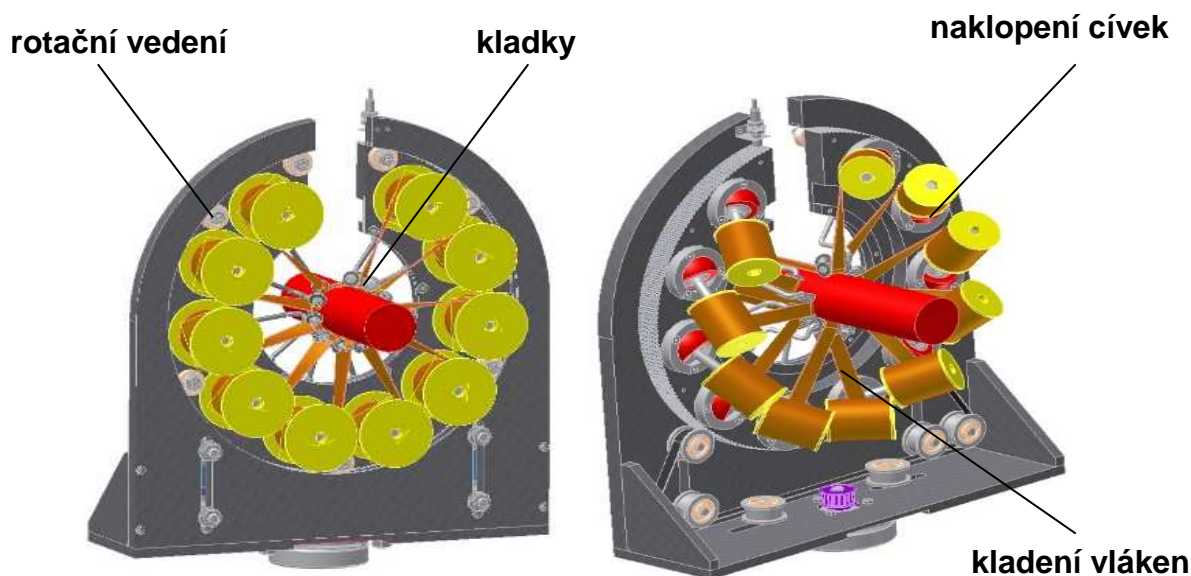
### 3.2.1 Konstrukční návrhy prototypové technologie ovíjecího zařízení hlavy pro nanášení vlákenné výztuže na profilovou geometrii jádra

Při vývoji prototypové technologie zařízení pro kladení vláken na jádro, která by plnila uvedené funkce, se provedlo vytvoření několika konceptů a konstrukčních návrhů, které se postupně modifikovaly a optimalizovaly vzhledem k získávaným informacím z numerického modelování. Významný problém nastává především v odvíjení a kladení vláken na jádro, neboť je předpoklad, že se vlákna při posouvání jádra budou protahovat ve směru posuvu jádra, sklouzávat z povrchu jádra, či se zadržovat a třepit o hrany obvodu jádra či o hrany částí navíjecí hlavy. Konstrukční návrh uspořádání prototypového zařízení hlavy pro nanášení vlákenné výztuže na geometrii jádra je uveden na obr. 3.2.1. Pro první zkoušení a testování je vhodné, aby geometrie jádra měla jednoduchou geometrii např. konstantní kruhový průřez. Směr posuvu v kombinaci se směrem rotace hlavy definuje úhel pokládání vláken. Navíjecí hlava má v horní části otevírací segment, který vytváří z hlavy geometrický tvar „písmene C“

z důvodu vložení různých tvarů rámu (mezera na obvodu rámu umožňuje vložení i uzavřeného rámu). Cívky s vlákny jsou uloženy na trnech umístěných na rotačním vedení (pohyb je řešen ložisky uloženými v drážce). Pohon je realizován ozubeným řemenem, který přenáší krouticí moment z motoru na rotační část hlavy. Navíjecí hlava je umístěná na profilovém hliníkovém rámu.



**Obr. 3.2.1.** Konstrukční návrh uspořádání prototypového zařízení hlavy pro nanášení vlákenné výztuže na geometrii jádra.



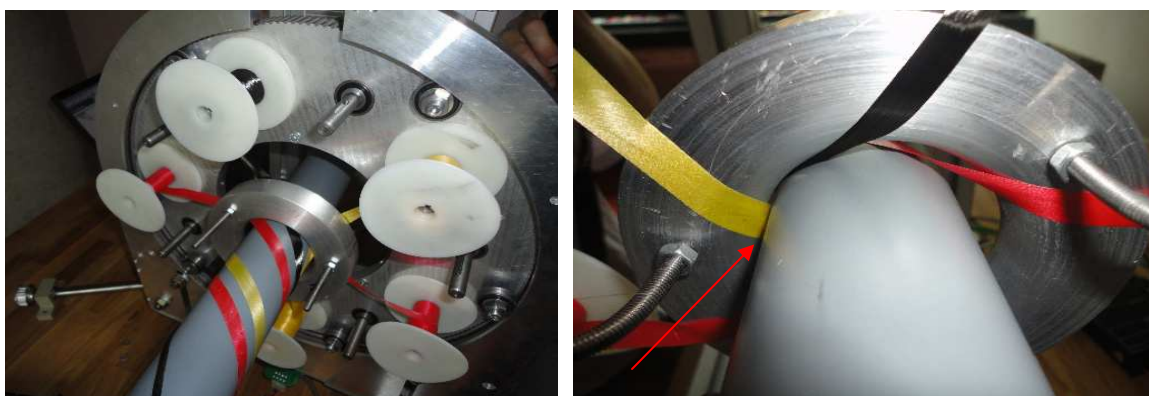
**Obr. 3.2.2.** Možné modifikace navíjecí hlavy prostřednictvím naváděcích elementů pro kontrolu kladení vláken na povrch jádra: přes kladky (vlevo), naklonění cívek (vpravo).

Dále se uvažovala různá koncepční řešení modifikace nanášení vláken z navíjecí hlavy prostřednictvím naváděcích elementů pro kontrolu kladení vláken na povrch jádra

(obr. 3.2.2). Také se nabízelo řešení navádění vlákenného pramence na jádro přes kladky (obr. 3.2.2 vlevo). Kladky mohou mít např. tvary válečků či soudečků s čely po obou stranách. Pozitivní tvar soudečků zajišťuje roztažení pramene, aby jeho šíře při pokládání byla pokud možno totožná se šíří při odvíjení. Možností by také bylo naklopení cívek do směru uložení vláken. Trny cívek by byly nasazeny na kulové čepy s možností natočení do směru uložení vláken (obr. 3.2.2 vpravo). Ze znalostí, které byly získány výrobou vzorků (ruční kladení vláken) bylo patrné, že naváděním vlákenného pramence na povrch jádra mohou vznikat místa s nezaplněným množstvím vláken (obr. 2.2.3, viz kap. 2), neboť vlákna si při navíjení vytvářejí vlastní trajektorii návinu. Proto za účelem řízení trajektorie byl jako vodící element testován také kroužek resp. kroužky s průměrem o něco větším, než je šířka vlákenného pramence, pro odvádění pramence z jednotlivých cívek (obr. 3.2.3 vlevo). Ty byly umístěny na rotační část navíjecí hlavy, problémem tohoto řešení se však ukázalo, že se vlákenný pramenec táhne přes negativní průměr kroužku (obr. 3.2.3 vpravo), což způsobuje, že se pramenec zužuje a ohýbá, přičemž je také neřízeně brzděn. Výsledkem je, že nelze vhodně vlákenné pramence navíjet pro požadovanou šířku a orientaci vláken. Proto se provedla konstrukční úprava naváděním vláken přes jeden velký kroužek o definovaném průměru, který je větší než průměr jádra (obr. 3.2.4 vlevo), kde je patrné, že se pramenec sice také táhne přes negativní hranu kroužku, ale vzhledem k většímu radiusu kroužku se vlákna nezužují a výsledně mají odpovídající šířku vlákenného pramence, jak je patrné na obr. 3.2.4 vpravo.



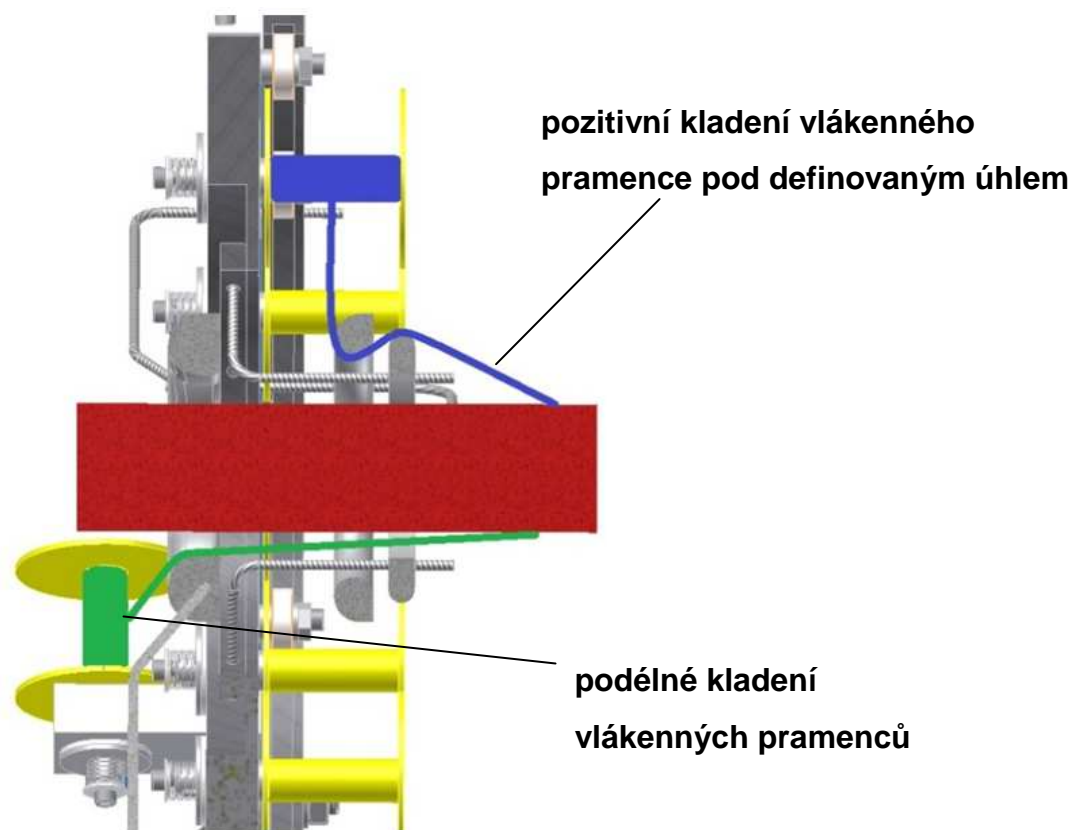
**Obr. 3.2.3.** Naváděcí elementy z kroužků pro navádění vláken z cívky (vlevo), detail kroužků (vpravo).



**Obr. 3.2.4.** Naváděcí element z velkého kroužku pro navádění vláken z cívek (vlevo), detail navádění vlákenného pramence (vpravo).



V ideálním případě by bylo vhodné navrhnout konstrukční řešení, kdy vlákna budou tažena přes pozitivní hranu naváděcího elementu. Za tímto účelem bylo navrženo konstrukční řešení s naváděním vlákenného pramence přes dva kroužky, kdy nejprve vlákna přecházejí přes negativní hranu prvního kroužku a dále překonávají pozitivní hranu druhého kroužku, jak je znázorněno v řezu na obr. 3.2.5. Zároveň je z řezu patrné, jak jsou na opačné straně staticky uloženy cívky (pevně fixovány na rám) pro podélné kladení vláken na jádro. Reálné provedení je uvedeno na obr. 3.2.6.



**Obr. 3.2.5.** Naváděcí elementy s 2 kroužky pro pozitivní navádění vláken.

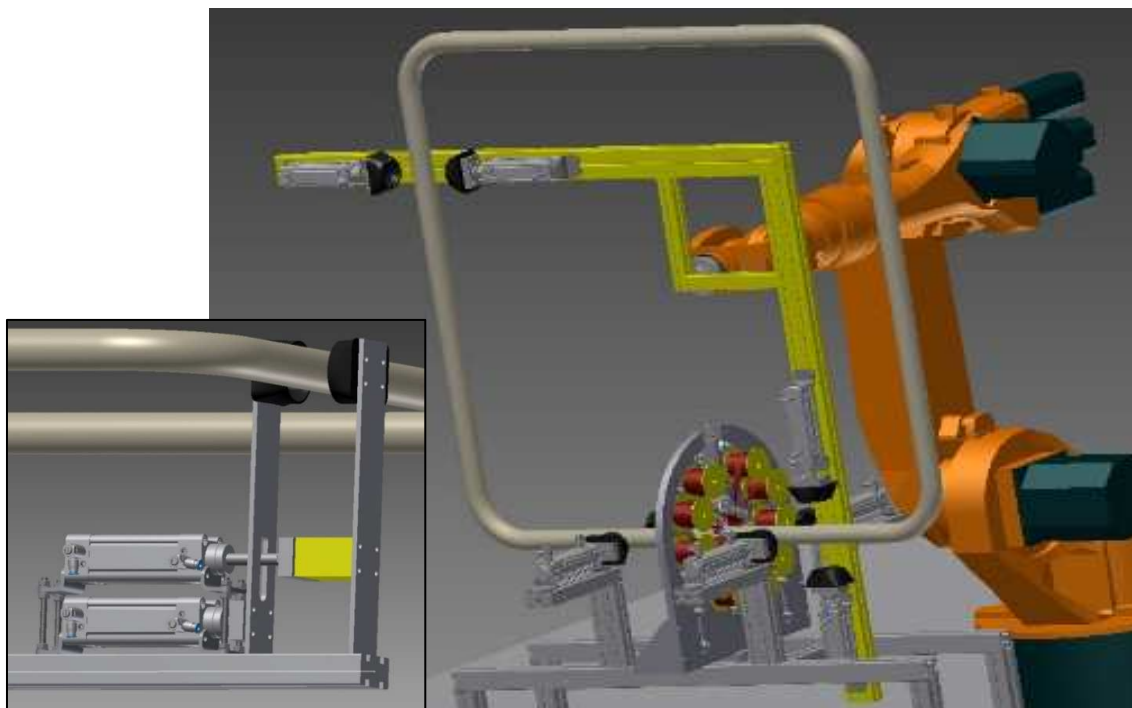


**Obr. 3.2.6.** Reálné provedení naváděcích elementů se 2 kroužky pro pozitivní navádění vláken.

Uváděné principy vývojového řešení prototypové technologie ovíjecího zařízení hlavy pro nanášení vlákenné výztuže na profilovou geometrii jádra rámu byly podrobeny řadě testování navíjení vlákenného pramence na jádro, kde byly zjištěny další poznatky ohledně rychlostí otáčení hlavy, posuvu jádra a navádění pramenců na jádro, jak je uvedeno např. v publikaci Martinec, Mlýnek a Petrů [42]. Tyto informace a znalosti vedly k rozšíření vývojového řešení prototypové technologie ovíjecího zařízení hlavy pro nanášení vlákenné výztuže na profilovou geometrii jádra na robotizovanou automatizaci.

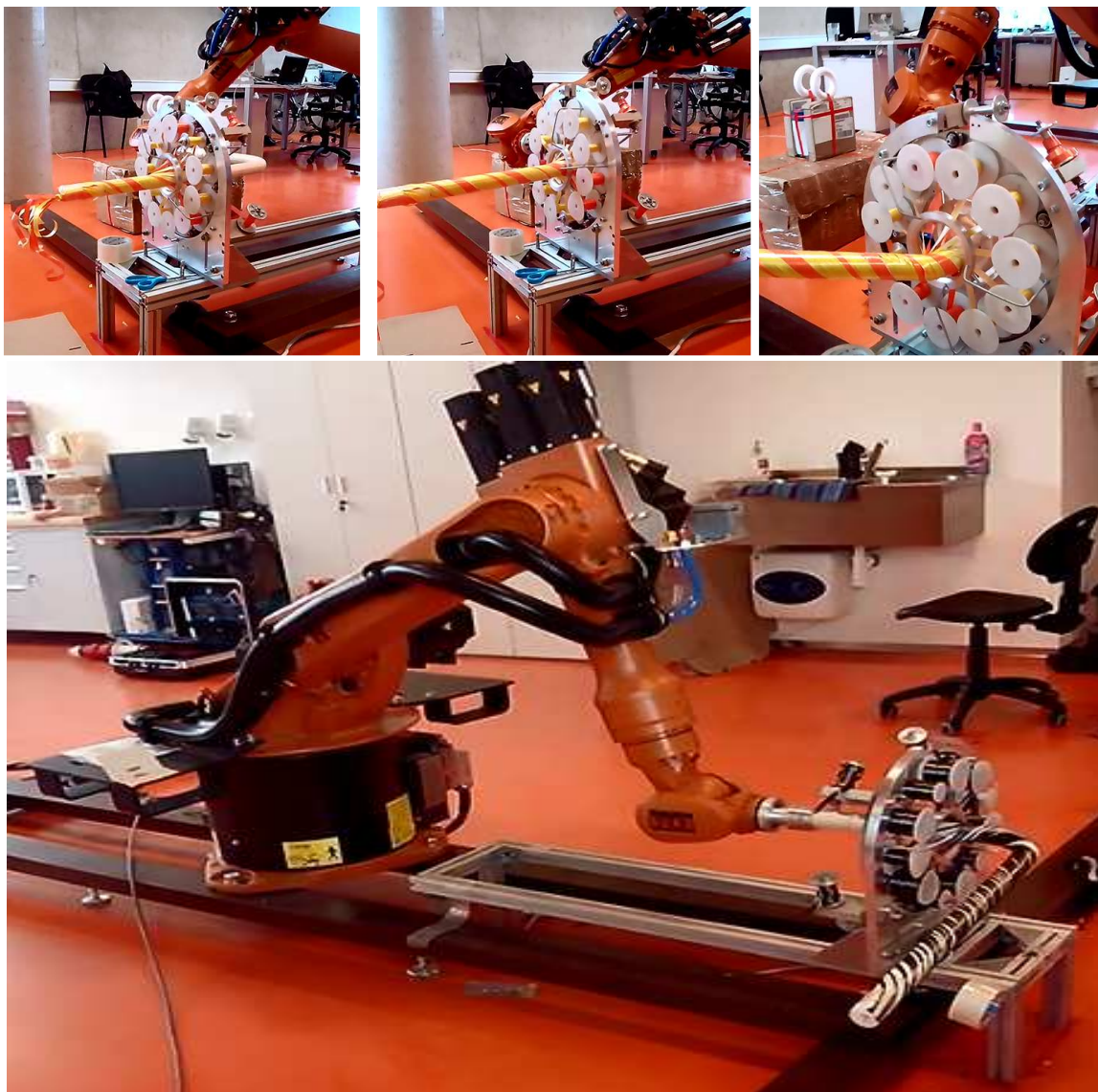
### 3.2.2 Automatizace prototypové technologie ovíjecího zařízení hlavy pro nanášení vlákenné výztuže na geometrii jádra

Robotizovaná automatizace vývojového řešení prototypové technologie ovíjecího zařízení hlavy pro nanášení vlákenné výztuže na profilovou geometrii jádra je významná jednak pro laboratorní testování, tak i pro případnou průmyslovou aplikaci. Velký význam je také z hlediska rozšiřování přístrojového vybavení laboratoře aplikované mechaniky, kterou spravuje katedra částí a mechanismů strojů a oddělení konstrukce strojů. Prototypová automatizace s využitím robota je také přínosná pro technologii ovíjecího zařízení hlavy z hlediska uložení plně uzavřeného jádra, jak je uvedeno na obr. 3.2.7. Princip ovíjení uzavřeného jádra rámové konstrukce spočívá v tom, že robot, který má 6 stupňů volnosti drží rám a zároveň s ním posouvá a rotuje při průchodu rámu navíjecí hlavou. Uzavřené jádro rámové konstrukce bude drženo minimálně dvěma elastickými úchyty uloženými na přípravku, které budou pneumaticky dotlačovány (obr. 3.2.7 detail). Úchyt, který drží jádro v místě okamžitého průchodu navíjecí hlavou, se rozpojí a v té chvíli bude jádro drženo minimálně jen jedním úchytem.



**Obr. 3.2.7.** Konstrukční návrh automatizace prototypového zařízení hlavy pro nanášení vlákenné výztuže na geometrii jádra uzavřených rámových konstrukcí.

Jestliže se bude jednat o jádro pro otevřený rám, může robot přímo držet jádro a zároveň s ním posouvat či rotovat při průchodu hlavou, jak je patrné na reálném testování v prostorách laboratoře aplikované mechaniky (obr. 3.2.8).



**Obr. 3.2.8.** Reálné testování robotizované automatizace prototypového zařízení hlavy pro nanášení vlákenné výztuže na křivou geometrii jádra.

Těmito výzkumy a konstrukčními provedeními vedoucími k ucelenému vývojovému řešení komplexní prototypové technologie pro výrobu lehkých rámců z kompozitních materiálových struktur vyztužených dlouhými vlákny vzniklo unikátní pracoviště s automatizovanou technologií navíjení vláken resp. vlákenných pramenců na geometricky definované jádro. Jedním z problémů tohoto vývojového řešení, však zůstává nikoliv samotné definování navíjení vláken na jádro budoucího rámu, či výpočet trajektorie robota pro optimální navíjení vlákenného pramence [42]. Významným, ne-li největším problémem se stala otázka „**jaké je optimální navíjení vlákenné výztuže vzhledem k pevnosti...?**“. Je to jedna či  $n$  – vrstev podélných vláken, či kombinace podélných vláken (první vrstva) s vlákny navíjenými pod úhlovou orientací (další vrstvy),

nebo pro křivé rámy jsou to jen vlákna navíjená pod úhlovou orientací? Tato otázka plyne z neznalosti mechanických vlastností rámců a rámových konstrukcí vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny, neboť jak již bylo uvedeno, různou kombinací a uspořádáním vláken, jenž může mít  $n$  – možností, získáváme různé mechanické vlastnosti. Proto než vytvářet řady prototypových vzorků s různou variací vlákenné výztuže, lze mechanické vlastnosti studovat pro podporu optimalizace rámců vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny opět prostřednictvím matematického resp. numerického modelování. Mareš [43] numerickým řešením porovnává optimální počet vrstev kompozitu s dlouhými vlákny v závislosti na orientaci vlákenné výztuže trubkových profilů, kde výsledky jsou však omezeny jen pro rovné geometrie. Teoreticky nejvyššího potenciálního ztužení prostorových rámových konstrukcí rovných či zakřivených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny se dosáhne, jsou-li vlákna namáhána až do meze pevnosti napětím přeneseným maticí, jak uvádí Lufinka a Petřů [38]. Pro konstrukční aplikace se zpravidla však nepoužívají kompozity s jednosměrnou výztuží (příčně izotropní výztuž), neboť rozložení vektoru hlavních napětí nepůsobí v celém konstrukčním prvku v jednom směru. Proto je důležitá znalost, jak významně ovlivňuje samotná orientace a množství vláken pro různá zatížení velikost napětí, což by se stalo odpovědí na výše uvedenou otázku. Obecně analytické vztahy, které jsou ve velmi dobré shodě s experimenty, jsou omezeny pouze na využití vzorků resp. strukturních jednotek v tahovém, popřípadě tlakovém zatížení, jak bylo diskutováno v kap. 2. Rám je složitý prostorový útvar, jenž může být zatížen silami, které způsobují nejen napětí tahová a tlaková, ale také smyková a torzní, kde již analytické či empirické vztahy tuto skutečnost neumějí vhodně zohlednit. Lze také předpokládat, že tato napětí působí v hlavních složkách kompozitní struktury s největší hodnotou v mezifázovém rozhraní, jak bylo diskutováno v kap. 2.5. Připomeňme, že byly napsány řady hypotéz a teorií, ale vždy se zejména jednalo o uniaxiální resp. příčně izotropní vlákenný kompozit (viz kap. 2.4). Také numerické modely jsou obecně odkázány na zjednodušení problému viz I. kontinuální model uvedený v kap. 2.5.2, který prostřednictvím 2D geometrie umožňuje definovat všechny fáze (množství a orientace vláken, maticí), což vede k tomu, že kvantitativní hodnocení kompozitní struktury využívá pouze ideální objemové zaplnění jednotlivých komponent tj. matrice a vlákenné výztuže. To však přímo nezohledňuje uspořádání vláken resp. uspořádání vlákenného pramence ve vrstvě, pouze to idealizuje, přičemž právě geometrické uspořádání (směr a položení vláken) určuje jedinečnost konkrétního provedení kompozitní struktury <sup>(27)</sup>. Tedy z výše uvedeného je zřejmé, že možnosti stanovit dosažitelnou pevnost rámu či rámové konstrukce z vyvíjené kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny je komplexní problém, který lze řešit pouze orientačně, resp. idealizovaně. Zavedme, ale předpoklad, že by se sestavil takový numerický model, který by se více přibližoval reálnému uspořádání navíjených vláken na geometrie jádra rámu. Současnými možnostmi numerického modelování lze řešit prakticky jakýkoliv fyzikální problém pro jakoukoliv vymodelovanou geometrii, přičemž geometrii navinutého

<sup>(27)</sup> Pozn. Do problému ve skutečnosti vstupují i další proměnné, které v modelových simulacích budeme zanedbávat resp. je nebudeme definovat. Například jemnost vláken je zcela rozhodující pro vznik mezifáze a liší se v závislosti na průměru vláken, tvaru průřezu (kruhový, hvězdicový, laločnatý), povrchových vlastnostech vláken, především drsnosti, průřezu vláken a jejich orientace vzhledem k působícímu napětí apod., jak bylo diskutováno např. v Petřů, Syrovátková, Kolínová, Novák [44].



idealizovaného vláknenného pramence (navinutí do šroubovice) lze vytvořit prostřednictvím parametrických rovnic v CAD systémech. Tedy touto možností by se mohl vytvořit numerický model principiálně podobný II. kontinuálnímu modelu se strukturní jednotkou (viz kap. 2.5.2), ale v makroměřítku. Následnou verifikací prostřednictvím experimentů by numerická simulace mohla přinést významný optimalizační nástroj pro pevnostní posouzení rámu vyvíjeného z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny od daného zatížení. Nespornou výhodou je také, že simulace se bude nejen více přibližovat reálnému experimentu a umožní získat porovnání mechanických vlastností rámu s různě směrově uspořádanými vlákny, ale také se tím získají informace pro výrobní technologii navíjení vláken na prostorovou geometrii jádra.

### 3.3 Numerické modelování pro podporu optimalizace konstrukčního řešení rámců z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny

Znalosti vedoucí k optimálnímu prostorovému navíjení vláknenné výztuže na často velmi složité geometrické tvary jádra vyžaduje optimalizace vývojového řešení výrobní technologie uvedené v kap. 3.2. Jedná se o komplexní problém, který lze řešit prostřednictvím pokročilého numerického modelování, které by se více přibližovalo reálnému uspořádání navinutých vláken na geometrii jádra rámové konstrukce a umožnilo by zpřesnit idealizované matematické modely a zjednodušené výpočetní postupy. Takováto pokročilá numerická simulace rámové kompozitní konstrukce vyztužené dlouhými vlákny by mohla být provedena prostřednictvím následujících kroků:

- a) Vytvoření prostorového geometrického modelu jádra budoucího rámu v CAD systému.
- b) Generování parametrických rovnic za účelem navíjení vláknenné výztuže na geometrii jádra rámu v CAD nebo MKP programu.
- c) Vytvoření numerického modelu prostřednictvím metody konečných prvků pro analýzu mechanických vlastností pro dané zatížení.

Příprava a odpovídající vytvoření geometrie numerického modelu hraje jednu z klíčových rolí pro následné analýzy. Je to dáno tím, že prostorové tvary trajektorií šroubovic definovaných prostřednictvím matematických vztahů pro geometrické rovnice se převedou do konstrukčních tvarů  $n$  – počtu vláknenných výztuží, které se budou vinout kolem geometrického tvaru jádra. Tento přístup numerického modelování rámců vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny prostřednictvím metody konečných prvků je poměrně ojedinělý. Přesto lze uvést několik podobných přístupů, kde byly vyvinuty podobné numerické modely s odpovídající geometrií popsanou parametrickými rovnicemi, které sice nebyly vytvářeny pro navíjení vláknenné výztuže na jádra kompozitních rámců, ale byly vytvářeny např. pro posouzení mechanických vlastností lan, provazů či drátových kabelů při různých zatíženích. Geometrické modely drátových kabelů lze vytvořit jako diskrétní trajektorie různých konfigurací spirálovitě zahnutých válců, které se vzájemně kontaktně překrývají i s ohledem na konstrukční uspořádání a třecí účinky jednotlivých drátů kabelu, jak uvádí Utting a Jones [45]. Parametrické rovnice využitelné pro vytvoření geometrie lana s osově

souměrnými prameny uvádí Lee [46]. Byly také odvozeny rovnice, které popisují souřadnice geometrie šroubovice ocelového drátu v laně, kde Hobbs a Nabijou [47] zároveň studovali změnu v zakřivení oblouku šroubovice, resp. jak přesně jsou zakřivené oblouky šroubovice s ohledem na definovanou trajektorii. Raoof a Kraincanic [48] pro změnu představili model pro teoretickou analýzu velkého průměru lana, kde autoři analyzovali chování základních spirálových vláken s využitím ortotropního materiálového modelu. Také se vyvíjí softwarové programy jako jsou např. CableCAD pro geometrické modelování provazců za účelem analýzy mechanických vlastností metodou konečných prvků (Knapp, Das a Shimabukuro [49]), či Fiber Rope Modeller pro komplexní analýzu lan, které umožňují bez definování matematických rovnic pro geometrické modelování sestavit odpovídající analýzy jen zadáním vstupních konstrukčních a materiálových parametrů, jak uvádí Leech a kol. [50].

V této práci byly matematické rovnice pro geometrické modelování navíjení vláknenné výztuže na jádro rámu implementovány do CAD softwarů CATIA V5 a Solidworks 2013. Tyto CAD softwary umožňují vygenerovat jednu i více vrstev  $n$  – počtu vláknenných pramenců ovinutých kolem jádra prostřednictvím rovnic s proměnnými vstupními parametry, které budou určovat trajektorii jednotlivých vláknenných pramenců pro pravotočivé i levotočivé navíjení. Přesnost odvozených parametrických rovnic pro geometrické modelování navíjení vláknenné výztuže na jádro lze následně posoudit analýzou přímo v CAD softwaru a vizualizací.

### 3.3.1 Parametrické rovnice pro prostorové modelování navíjení vláknenné výztuže na geometrii jádra

Zavedme trojrozměrný Euklidovský prostor, který je tvořen prostorem reálných čísel  $\mathbf{E}^3(\mathfrak{R})$ , kde  $\mathfrak{R}$  je množina reálných čísel s pravouhlým kartézským souřadným systémem  $(0; x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$ . V tomto prostoru je libovolný bod  $B$  jednoznačně určen homogenními souřadnicemi  $B(x_B, y_B, z_B)$ , eventuálně lze to také psát v rozšířeném Euklidovském prostoru  $B(x_B, y_B, z_B, 1)$ , kde  $x_B, y_B, z_B$  jsou kartézské souřadnice bodu  $B$ . Přemístění bodu  $B$  do bodu  $B'$  lze provést prostřednictvím geometrické transformace. Potom homogenní souřadnice bodu  $B'(x'_B, y'_B, z'_B, 1)$  jsou určeny prostřednictvím transformace  $[T_i]$  bodu  $B(x_B, y_B, z_B, 1)$  podle vztahu (3.3.1).

$$[T_i]^T \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x'_B \\ y'_B \\ z'_B \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.3.1)$$

kde matice  $[T_i]$  může charakterizovat matici posuvu  $[T_{ib}]$  nebo matici rotace  $[T_{rB}]$ , které lze následně rozepsat např. pro pohyb a rotaci do vertikální osy  $z$  podle rovnice (3.3.2).

$$[T_{tBz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \end{bmatrix}, [T_{rBz}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.3.2)$$

Sestava několika transformací se provádí násobením odpovídajících matic podle vztahu (3.3.3).

$$\prod_{i=1}^n [T_i]^T \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x'_B \\ y'_B \\ z'_B \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.3.3)$$

kde  $n$  je počet potřebných transformací, přičemž změna pořadí matic mění konečný výsledek. Tyto geometrické transformace budou důležité pro následné řešení parametrických rovnic pro určení množství i směrového uspořádání navíjené vláknenné výztuže na geometrický tvar jádra.

#### i. Vytvoření geometrického tvaru jádra

Zavedeme pravotočivý kartézský souřadný systém  $(0; x, y, z)$ , který je umístěn tak, že osa rotace kolem které se otáčí šroubovice vinutí (navíjí se pramenec vláken pod určitým úhlem) je totožná s osou  $z$ . Dále budeme uvažovat, že geometrie jádra má kruhovou podstavu se středem v bodu  $J(0, d/2)$ , který je ztotožněn s počátkem osy  $z$ . Průměr jádra je definován velikostí  $d$ . Osa jádra, která se vysune ve vertikálním směru, vytvoří přímku o dané délce  $m$ , přičemž souřadnice této přímky jsou definovány pomocí parametrické rovnice (3.3.4). Tím se vytvoří geometrie jádra, v tomto případě se jedná o vytvoření geometrie válce.

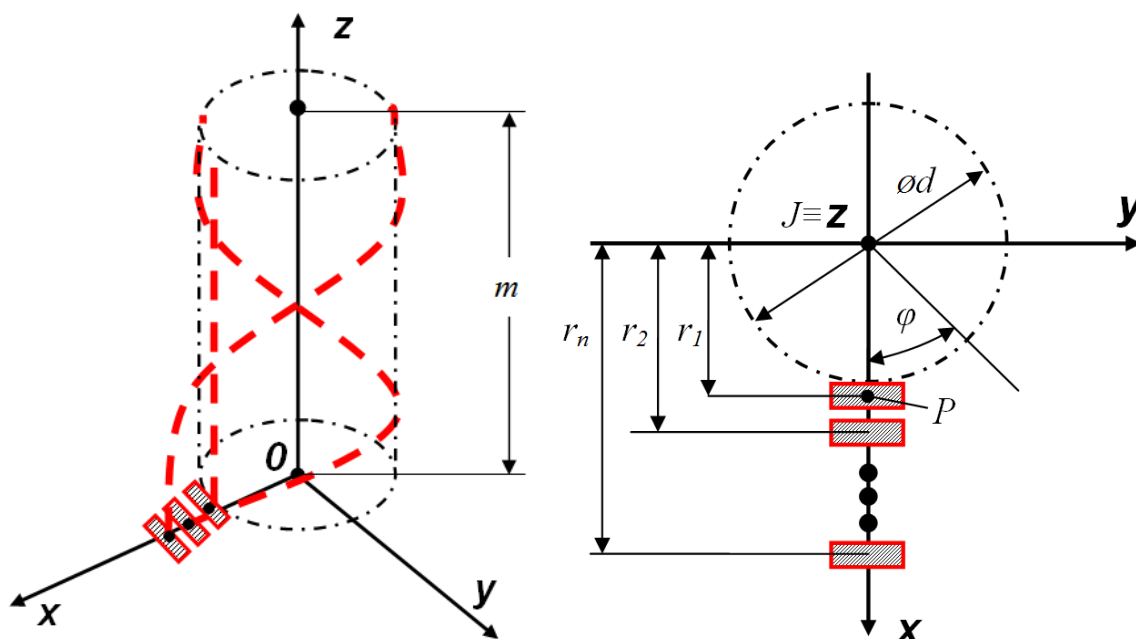
$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= tm \end{aligned} \right\}, \quad (3.3.4)$$

kde  $t$  je parametr v rozsahu,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ .

#### ii. Vinutí vláknenného pramence na geometrický tvar jádra

Vláknenný pramenec (vláknenná výztuž), který se podélně nebo pod směrovým úhlem navíjí na jádro, budeme uvažovat, že v řezu má pravidelný tvar obdélníku jednoznačně určený danou tloušťkou  $h$  a šířkou  $b$  (stejně jako byly definovány testovací vzorky v kap. 2.1). Pramenec navíjený na jádro ve vrstvě  $j$  se buď posouvá podélně (vertikálně) po obvodu jádra s délkou  $m$ , tedy střed osy se stává přímkou (podélně navíjená vlákna) nebo je pramenec na obvod jádra pokládán spirálovitě tak, že se středová

osa stává šroubovicí, která rotuje kolem osy  $z$  pod úhlem stoupání  $\alpha_j$ , přičemž  $\alpha_j$  je úhel stoupání vlákného pramene v  $j$ -té vrstvě. Tyto geometrické útvary (přímka, šroubovice) svou dráhou o velikosti požadované délky navíjení vytvářejí plochy dané průřezem vlákného pramene a zároveň vytvářejí objemové geometrie. Dále definujeme bod  $P(r_j, 0, 0, 1)$ , jenž bude středem osy vlákného pramene v  $j$ -té vrstvě a  $r_j$  bude poloměr vzdálenosti středu osy vlákného pramene v  $j$ -té vrstvě, jak je uvedeno na obr. 3.3.1.



**Obr. 3.3.1.** Vinutí středu osy vlákenného pramence na geometrický tvar jádra v jednotlivých vrstvách.

Podélný pohyb bodu  $P$  vytvářející podélně navíjený pramenec v  $j - té$  vrstvě, lze popsat obdobně jako vytvoření geometrie jádra, tedy podle rovnice (3.3.4). Šroubový pohyb bodu  $P$  vytvářející úhlem orientovaný navíjený pramenec v  $j - té$  vrstvě lze popsat složením dvou základních prostorových transformací, tj. rotací a posuvem, jak uvádí rovnice (3.3.1). První prostorovou transformací  $[T_{rpz}]$ , je rotace bodu  $P$  kolem osy  $z$  s úhlem otáčení  $\varphi$ , což lze vyjádřit rovnicí (3.3.2) pro rotaci bodu  $P$ . Druhou prostorovou transformací  $[T_{lpz}]$ , je posuv bodu  $P$  ve směru osy  $z$  okolo vektoru  $\{v\} = \{0, 0, z_v, 0\}$ , což lze vyjádřit rovnicí (3.3.2) pro posuv bodu  $P$ . Parametr  $z_v$  je dán vztahem (3.3.5).

$$z_v = \varphi \frac{r_j}{tg \alpha_j}. \quad (3.3.5)$$

Potom lze homogenní souřadnice každého bodu šroubového pohybu bodu  $P$  vyjádřit prostřednictvím rovnice (3.3.6).

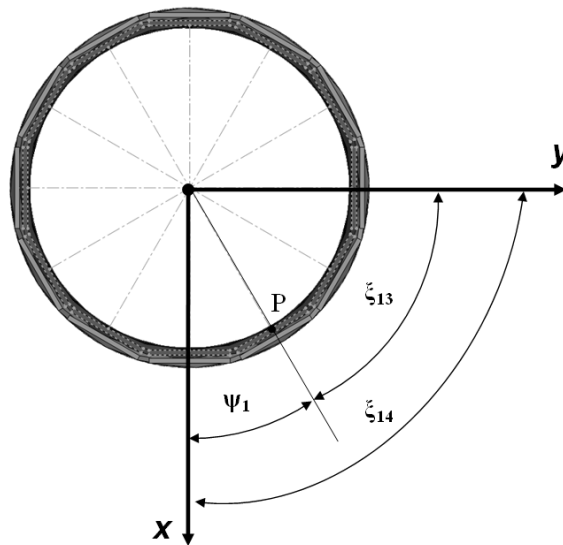
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{Bmatrix} = [T_{tP}]^T [T_{rP_z}]^T \begin{Bmatrix} r_j \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.3.6)$$

Řešením (3.3.6) se získají parametrické rovnice dané vztahem (3.3.7), kde budou souřadnice závislé na úhlu otáčení  $\varphi$ .

$$\left. \begin{aligned} x(\varphi) &= r_j \cos \varphi \\ y(\varphi) &= r_j \sin \varphi \\ z(\varphi) &= \varphi \frac{r_j}{\operatorname{tg} \alpha_j} \end{aligned} \right\}, \quad (3.3.7)$$

kde  $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

V jednotlivé  $j$ -té vrstvě vlákenných pramenců vzhledem k návrhu optimální pevnosti a tuhosti lze předpokládat, že existuje  $m_j \leq n_j$  vlákenných pramenců, jejichž maximální možný počet bude závislý na  $r_j$ , resp. od požadovaného množství vrstev pro finální konstrukci. Pro generaci přesně definovaného množství vlákenných pramenců následně zavedeme úhel  $\xi_{ji} = (i-1)2\pi / m_j$  umožňující rotaci středu osy bodu  $P$ , který bude příslušet libovolnému  $i$ -tému vlákennému pramenci, kde bude platit například pro  $j=1$  a  $m_{j=1}=12$  vlákených pramenců  $\xi_{ji} = \xi_{13} = 60^\circ$  a  $\xi_{14} = 90^\circ$ , jak je ukázáno na obr. 3.3.2. První vlákenný pramenec s bodem  $P$  bude v  $j$ -té vrstvě definovaný úhlem  $\psi_j$ , přičemž bude platit  $\psi_j \neq \xi_{ji}$ . Takováto soustava o  $m_j$  počtu vlákenných pramenců bude popsána podle vztahu (3.3.8), který rozšiřuje rovnici definovanou podle (3.3.7).



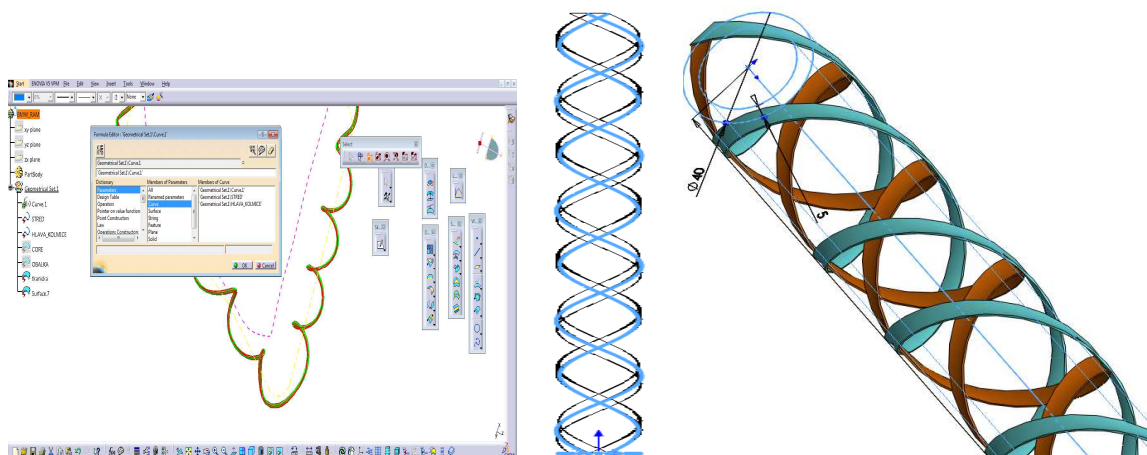
**Obr. 3.3.2.** Vinutí  $m_j$ -počtu vlákenných pramenců na geometrický tvar jádra.

$$\left. \begin{aligned} x(\varphi) &= r_j \cos(\psi_j + \xi_{ji} + q\varphi) \\ y(\varphi) &= r_j \sin(\psi_j + \xi_{ji} + q\varphi) \\ z(\varphi) &= \varphi \frac{r_j}{\tan \alpha_j} \end{aligned} \right\} = \left. \begin{aligned} x(\varphi) &= r_j \cos\left(\psi_j + (i-1)\frac{2\pi}{m_j} + q\varphi\right) \\ y(\varphi) &= r_j \sin\left(\psi_j + (i-1)\frac{2\pi}{m_j} + q\varphi\right) \\ z(\varphi) &= \varphi \frac{r_j}{\tan \alpha_j} \end{aligned} \right\}, \quad (3.3.8)$$

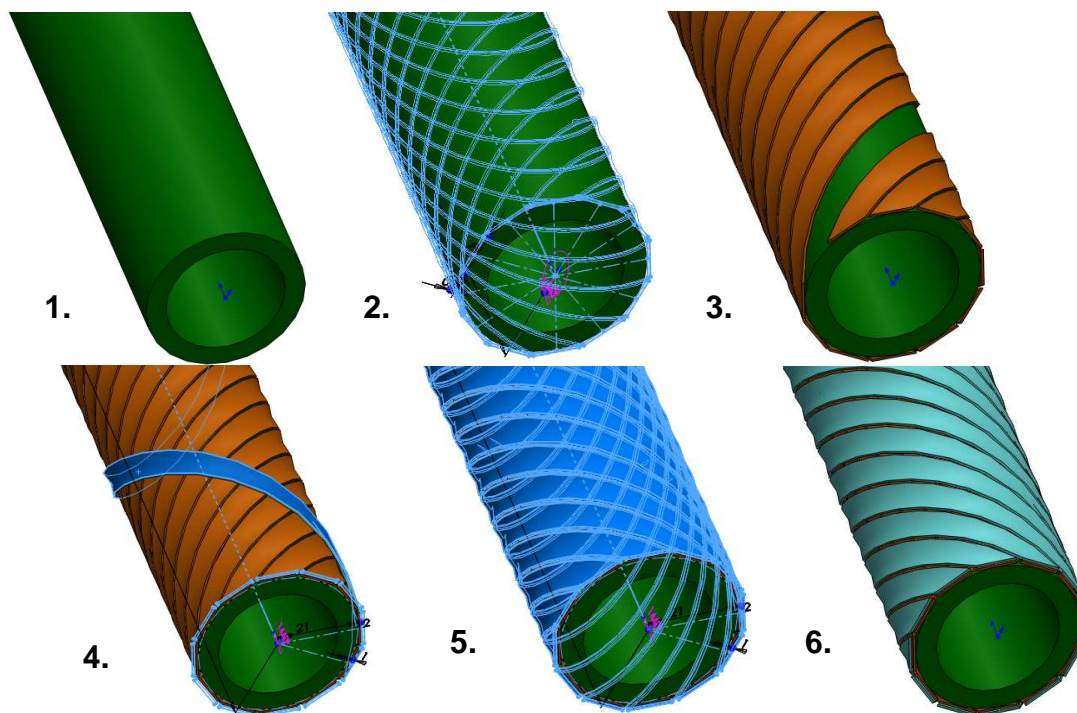
kde  $\psi_j$  je úhel natočení prvního vláknenného pramence v  $j$ -té vrstvě,  $m_j$  je počet vláknenných pramenců v  $j$ -té vrstvě ( $j=1,2,\dots,n_j$ ),  $q$  definuje smysl otáčení, tj.  $q=1$  pro kladný smysl otáčení nebo  $q=-1$  pro záporný smysl otáčení.

### iii. 3D generování vinutí vláknenného pramence na geometrický tvar jádra s kruhovým průřezem

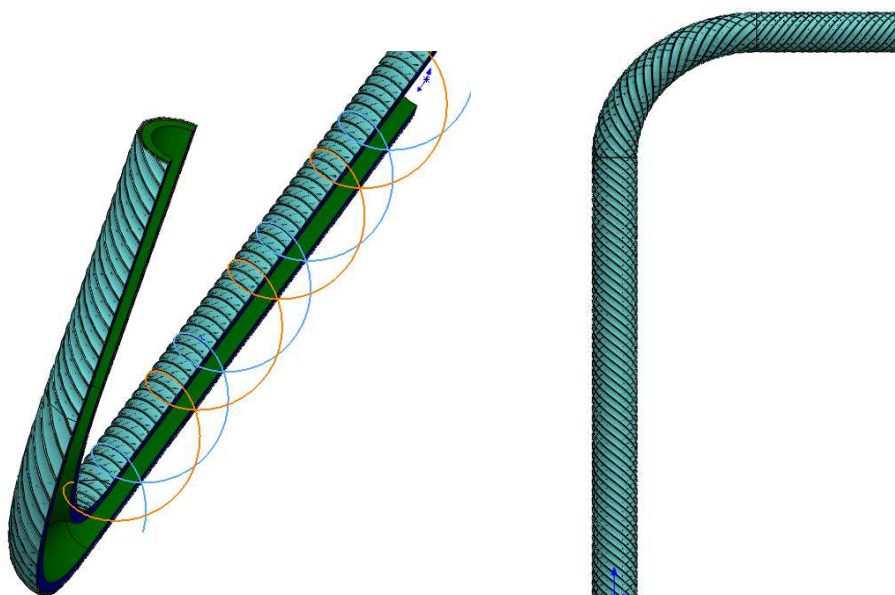
Uvedené parametrické rovnice (3.3.1 – 3.3.8) umožňují matematicky definovat geometrii tvaru jádra a geometrii i polohu libovolného vláknenného pramence, který ovíjí jádro budoucího rámu. CAD software Catia V5 případně SolidWorks 2013 umožňují komplexní generování vláknenného pramence na geometrický tvar jádra prostřednictvím parametrických rovnic, jak je znázorněno na obr. 3.3.3. V Catia V5 (SolidWorks 2013 má tyto funkce obdobné) se parametry definují v příkazovém editoru „Formula Editor“, kde lze zavést všechny vstupní parametry, tj. definovat proměnné funkce, křivky, geometrické tvary a rozměry, množství vláknenných pramenců, atd. Kompletní princip postupu tvorby navíjení v softwaru Catia V5 dobře popisuje např. Stanova, Fedorko, Fabian a Kmet [51]. Pro optimalizaci rámu vyvíjeného z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny se vytvořila stejná geometrie, jejíž generování vinutí je uvedeno na obr. 3.3.4. Jestliže nebude jádro rovné, resp. bude křivé (zahnuté nebo uzavřené), potom vztahy uvedené rovnicemi (3.3.1 – 3.3.8) budou pořád stejné, jen parametr  $t$  definovaný v rovnici (3.3.4) se změní na funkci, která bude popisovat danou trajektorii křivky vzhledem ke všem souřadným osám, tj.  $t = f(x, y, z)$ . Vytvořený model křivého jádra ovinutého vláknennými pramenci je uveden na (obr. 3.3.5).



**Obr. 3.3.3.** 3D generování vinutí vláknenného pramence na geometrický tvar jádra.



**Obr. 3.3.4.** Průběh 3D generování vinutí  $j - té$  vrstvy vlákenného pramence na rovný geometrický tvar jádra rámu vyvíjeného z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny.



**Obr. 3.3.5.** 3D generování vinutí  $j - té$  vrstvy vlákenného pramence na křivý geometrický tvar jádra rámu vyvíjeného z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny.

Prostřednictvím kroků i – iii se vytvořily CAD modely, které lze importovat pomocí souborů (např. .catpart, .step, .iges) do konečněprvkového programu pro analýzy a optimalizace mechanických vlastností rámců vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny.

### 3.3.2 MKP modely rámců vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny

CAD geometrie vytvořené principem podle kap. 3.3.1 jsou podkladem pro vytvoření numerických modelů rámců vyvíjených z kompozitní struktury. Numerické modely umožní studie a analýzy mechanických vlastností při daném zatížení, rozložení napětí na rozhraní jednoho vlákenného pramence s matricí, mechanismus delaminace vrstev [28], ale zejména prostřednictvím nich lze porovnávat a optimalizovat vliv orientace a směrového uspořádání vláknenných výztuží vzhledem k požadované pevnosti. Také se podle analýz bude moci vhodně naprogramovat robotická automatizace prototypové technologie pro optimální navíjení vláknenných pramenců. Získané informace uváděné v předešlých kapitolách stanovily poznatky, že napětí v kompozitu se přenáší téměř výhradně výztuží a to ve směru osy vlákna resp. vláknenného pramence (výztuže) prostřednictvím matrice. Uniaxiální kompozity ( $0^\circ$  úhel vláknenného svazku, tj. podélné uspořádání vláken) transformují tahové či tlakové napětí ve směru vláken a určité ohybové napětí kolmo na osu vlákna, přičemž odolnost v krutu bude nízká. Tahové napětí ve směru kolmém na vlákno se téměř nepřenáší, odolnost je dána v podstatě jen vlastnostmi matrice. Taktéž odolnost vůči ohybu je zanedbatelná. Vlákna s orientací pod určitým úhlem naopak přenášejí vyšší napětí v krutu, ale na úkor přenosu napětí v tahu či tlaku. To je dáno tím, že část vláken neleží ve směru působícího napětí. Z těchto informací plyne, že by bylo vhodné vytvářet kompozity vytvořené z jednotlivých vrstev s různou orientací vláknenné výztuže pro ucelenou pevnost. Pro stanovení, jak významně orientace vláknenných pramenců navinutých ve vrstvách na geometrii jádra rámové konstrukce ovlivňuje mechanické vlastnosti, bylo studováno řadou numerických modelů, z nichž některé budou představeny.

#### **I. MKP simulace vzorku rovného rámu vyvíjeného z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny**

Nejprve byly sestaveny 3 numerické modely vzorku rovného rámu vyvíjeného z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny pro porovnání mechanických vlastností při tahové zkoušce<sup>(28)</sup>. Modely byly vytvořeny s těmito vlastnostmi:

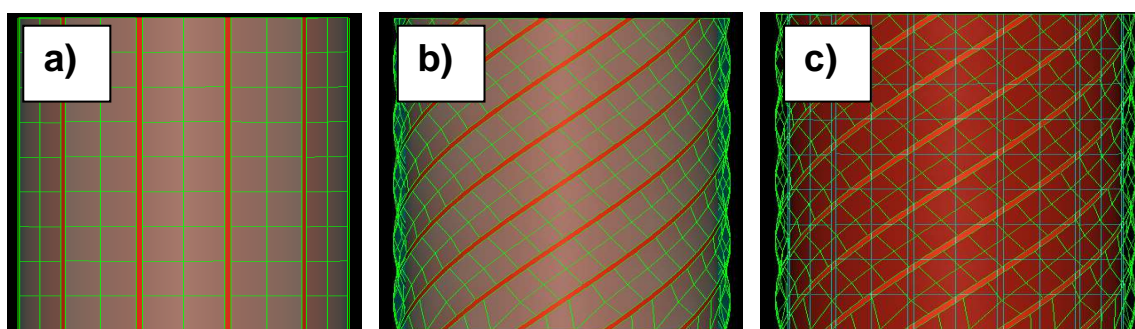
- model s jednou vrstvou 12 vláknenných pramenců navinutých na jádro pod úhlem  $0^\circ$ ,
- model s jednou vrstvou 12 vláknenných pramenců navinutých na jádro pod úhlem  $+45^\circ$ ,
- model s dvěma vrstvami s celkovým počtem 24 vláknenných pramenců orientovaných na jádro pod úhlem  $0^\circ$  a  $+45^\circ$ .

Tyto modely s definovaným množstvím vláknenných pramenců se stávají ilustrativním příkladem pro virtuální porovnání a studii synergického účinku vyvíjeného rámu z kompozitní struktury. Pro všechny modely byly zvoleny stejné parametry, tj. uhlíková vlákna s epoxidovou matricí podle materiálových vlastností uvedených v tab. 2.5.2

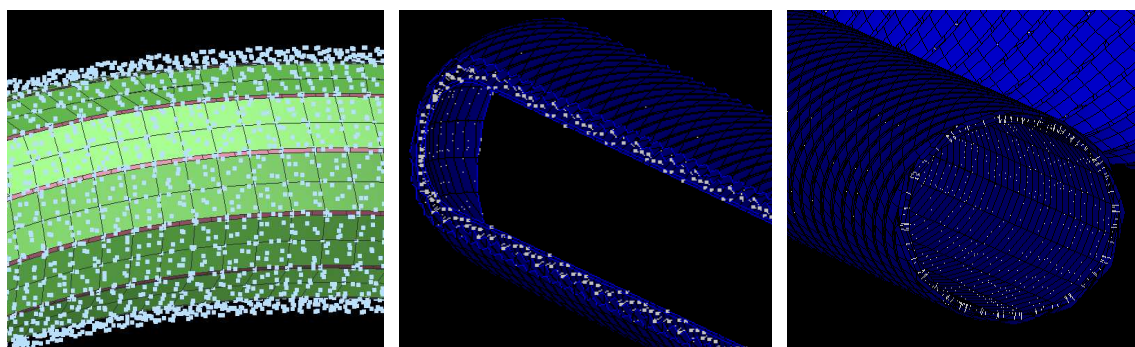
<sup>(28)</sup> Pro rovné rámové konstrukce z vyvíjené kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny byly prováděny numerické analýzy i pro další typy zaplnění i zatížení jako např. ohyb, tlak, krut. Některé z těchto výsledků jsou uvedeny v autorových publikacích např. [28], [38], [42].



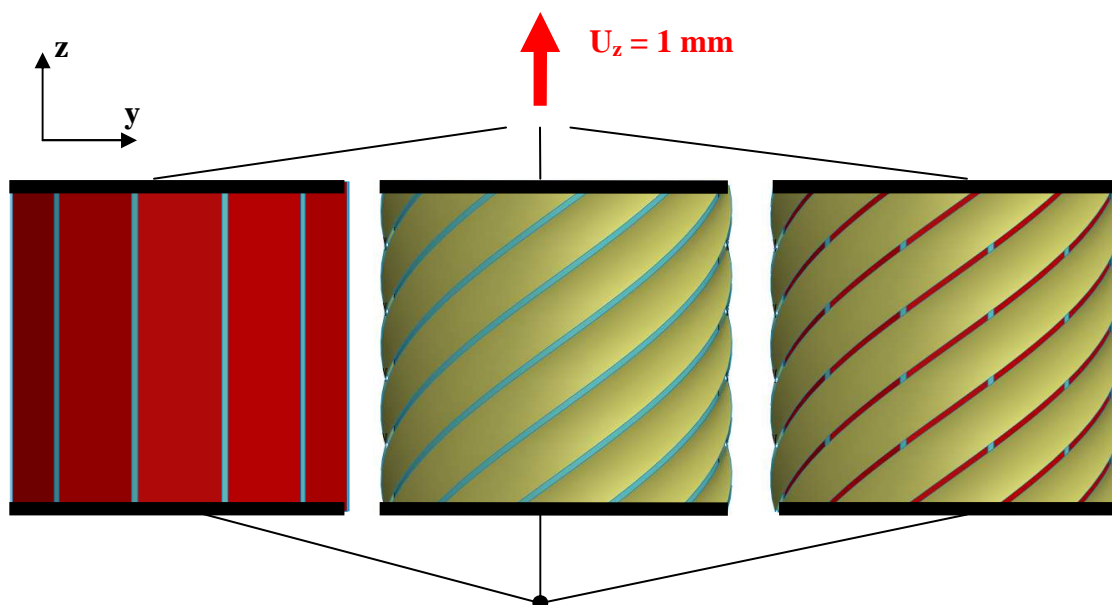
a tab. 2.5.5, kap. 2. Jádru mělo tyto parametry:  $\phi d = 40\text{mm}$ ,  $m = 100\text{mm}$  a vlákno:  $b = 10\text{mm}$ ,  $h = 1\text{mm}$ . Síť konečných prvků byla vytvořena ve speciálním programu Altair Hypermesh 12.1 [36], kde byla vlákenným pramencům a matici navržena pravidelná sturkturovaná síť z SHELL elementů s konstantní velikostí elementu 5 mm, jak je znázorněno na obr. 3.3.6. Spojení vlákenných pramenců s jádrem epoxidovou maticí pro vytvoření kompozitní struktury bylo modelováno pomocí Beamových elementů umožňujících přenos napětí do podélného i příčného směru s velikostí elementu 0,1 mm. Vytvoření spojení matrice s vlákny na rámu charakterizuje obr. 3.3.7. Všimněme si, že byl zvolený prakticky stejný princip, jaký byl využit u numerického modelu vzorku (II. rozšířený kontinuální model se strukturní jednotkou, kap. 2.5.2), ale v makroskopickém provedení. Model je sice složitější, než kdyby se sestavil kontinuální model pro danou geometrii (obdobně jako u vzorku viz I. kontinuální model, kap. 2.5.2), ale zato reálněji přibližuje objemové zaplnění  $V^f$  v kompozitním rámu. Okrajové a počáteční podmínky jsou uvedeny na obr. 3.3.8, prakticky se jedná o stejné okrajové podmínky jako u numerických modelů malých vzorků uvedených v kap. 2.5.2, tj. na jednu stranu okraje (čelo) rámu bylo uzlovým bodům definováno zamezení posuvu a rotace  $U_i = R_i = 0$  do všech směrů (vetknuté uložení) a na druhou stranu okraje bylo uzlovým bodům definováno posunutí do vertikálního směru (osy  $z$ )  $U_z = 1\text{mm}$  při rychlosti posunutí  $1\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ . Hodnoty velikosti časového kroku výpočtu  $\Delta t$  definovaného podle vztahu (2.5.9) jsou zejména ovlivněny okrajovými a počátečními podmínkami, velikostí, počtem a typem elementů, jsou uvedeny v tab. 3.3.1.



**Obr. 3.3.6.** MKP model vzorku rovného rámu vyvíjeného z kompozitní struktury s různou orientací a množstvím dlouhých vláken: a) jedna vrstva s orientací vláken  $0^\circ$ , b) jedna vrstva s orientací vláken  $45^\circ$ , c) dvě vrstvy s orientací vláken  $0^\circ$  a  $+45^\circ$ .



**Obr. 3.3.7.** Propojení matrice s vlákny v MKP modelu rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny.



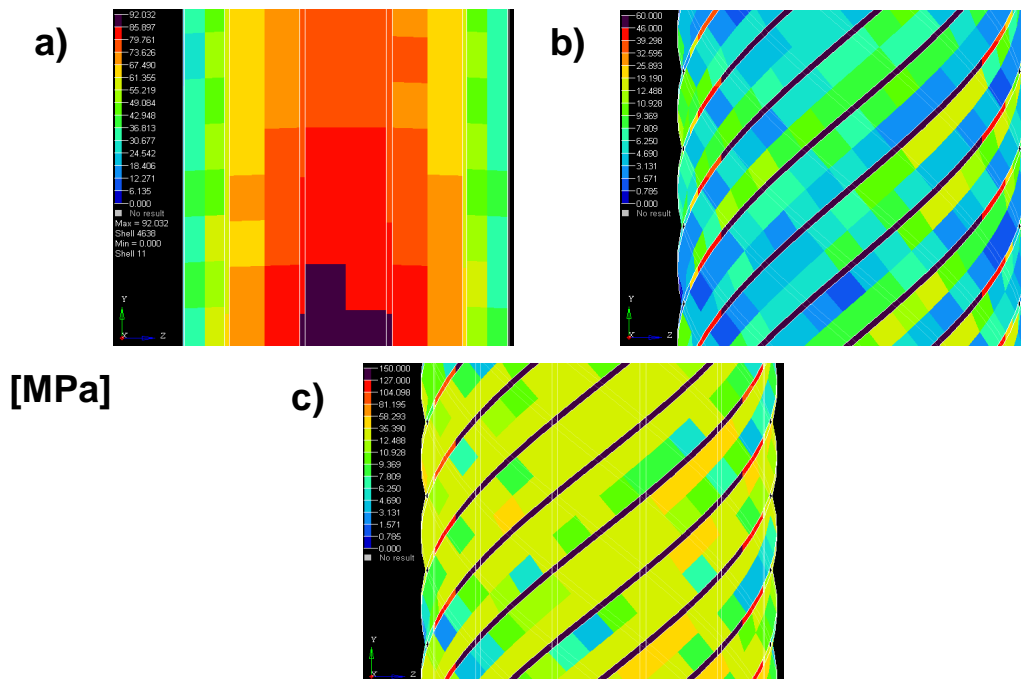
čelo (kruhový obvod) s uzlovými body pevně uloženo (fixace),  $U_x, U_y, U_z, R_x, R_y, R_z = 0$

**Obr. 3.3.8.** Okrajové podmínky numerického modelu vzorku rovného rámu z vyvíjené kompozitní struktury s různou orientací a množstvím dlouhých vláken.

**Tab. 3.3.1.** MKP model rovného rámu vyvíjeného z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny.

Typ rámu	Submodely kompozitní struktury	Typ elementu	Velikost elementu [mm]	Časový krok $\Delta t$ [s]
Otevřený rovný, otevřený křivý	Jádro z PU pěny	2D Shell	5	$7,897 \cdot 10^{-4}$
	Uhlíková vlákna (orientace $0^\circ$ )			$5,471 \cdot 10^{-4}$
	Uhlíková vlákna (orientace $45^\circ$ )			$5,471 \cdot 10^{-4}$
	Uhlíková vlákna (orientace $0^\circ$ a $45^\circ$ )			$3,297 \cdot 10^{-4}$
	Uhlíková vlákna (orientace $0^\circ, +45^\circ, +45^\circ$ )			$6,1392 \cdot 10^{-5}$
	Epoxidová matrice	1D Beam	0,1	$0,1392 \cdot 10^{-4}$

Výsledky hlavního napětí (osové napětí vznikající od normálové síly) z tahové zkoušky třech modelů vzorků rovného kompozitního rámu s definovaným množstvím vláknenných pramenců při natažení do 1 mm jsou uvedené na obr. 3.3.8.



**Obr. 3.3.8.** Výsledky rozložení hlavního napětí numerického modelu vzorku rovného rámu z vyvíjené kompozitní struktury s různou orientací a množstvím dlouhých vláken: a) jedna vrstva s orientací vláken  $0^\circ$ , b) jedna vrstva s orientací vláken  $45^\circ$ , c) dvě vrstvy s orientací vláken  $0^\circ$  a  $+45^\circ$ .

Podle numerických modelů, které pracovaly s chybou výpočtu  $\sim 7\%$  je patrné, že v modelech s jednou vrstvou (obr. 3.3.8a,b) je v rámu s podélně kladenými vlákennými pramenci napětí o více jak 50% vyšší, než u rámu s vlákennými pramenci orientovanými pod úhlem  $45^\circ$ . Tedy rám s podélně kladenými vlákny klade vyšší odpor proti natažení (vlákenná výztuž je plně využita ve směru zatížení), a proto konstrukce bude mít pro takovéto zatížení vyšší pevnost. Potvrzuje to teoretické předpoklady, že se napětí přenáší téměř výhradně výztuží a to ve směru osy vlákenné výztuže, zatímco s úhlovou orientací vlákenné výztuže se potenciál vláken snižuje. Je patrné, že při stejně zadaných vstupních parametrech modelu (stejná numerická diskretizace, materiálové vlastnosti, okrajové i počáteční podmínky) ovlivňuje výsledné napětí úhlová orientace vlákenné výztuže více než samotné množství vlákenné výztuže. Také z toho plyne významná informace, že s úhlovou orientací vlákenných pramenců zvyšujeme celkovou hmotnost kompozitní struktury  $m^c$ , neboť se zvyšuje objemové množství vláken  $V^f$ , ale paradoxně nezvyšujeme maximální možnou pevnost. Z toho lze usuzovat, že požadovaný synergický účinek kompozitní struktury nemusí vzniknout zvýšením množství vlákenné výztuže, ale nastane pouze optimálním množstvím a kladením vlákenné výztuže, což bylo zavedeno do patentové žádosti Ševčík, Tůma, Petrů, Martinec a Kovář [41]. Z výsledků modelové simulace rámu s dvěma vrstvami vlákenných pramenců kladených pod úhlem  $0^\circ$  a  $+45^\circ$  (obr. 3.3.8c), je patrný nárůst hlavního napětí, který je přibližně o 64% vyšší než u rámu s jednou vrstvou s podélnými vlákennými pramenci. V porovnání s rámem s jednou vrstvou s vlákennými pramenci uspořádanými pod úhlem  $+45^\circ$  je hlavní napětí větší dokonce o 150%. Z výsledků uvedených na obr. 3.3.8, však nevyplývá optimální úhlová orientace vzhledem k různým druhům zatížení. Principiálně rám může být obecně zatížen tahem, tlakem, ohybem, krutem, smykem, či kombinovaným namáháním (to bude platit nejen pro kruhové průřezy). Proto mohou v průřezu například působit silová

zatížení  $F_N, F_T, T_x, T_y, M_{ox}, M_{oy}, M_{oz}, M_k$ , která budou příčinou vzniku jednotlivých napětí  $\sigma_t, \sigma_{ox}, \sigma_{oy}, \sigma_{oz}, \tau_k, \tau_s$ . Kde  $F_N, F_T$  vyjadřuje normálovou sílu v tahu a tlaku, přičemž  $F_N$  a  $F_T$  lze uvažovat v oblasti elastických deformací přibližně stejné velikosti, která se mění v oblasti ztráty stability,  $M_{ox}, M_{oy}, M_{oz}$  je ohybový moment do daného směru  $x, y, z$ ,  $M_k$  je moment v krutu,  $T_x, T_y$  je posouvající síla do daného směru  $x, y$ ,  $\sigma_N, \sigma_T$  je tahové a tlakové napětí,  $\sigma_{ox}, \sigma_{oy}, \sigma_{oz}$  je ohybové napětí do daného směru  $x, y, z$ ,  $\tau_k$  je napětí v krutu a  $\tau_s$  je napětí ve smyku.

Proveďme proto optimalizaci úhlu vinutí pro maximalizaci tuhosti pro zvolené působící zatížení. Sestavíme ilustrativní příklad jedné vrstvy  $j=1$  s vláknennými pramenci  $m_j=12$  navinutými na jádro. Tedy se bude jednat o optimalizační úlohu stanovení napjatosti  $\sigma$  v závislosti na úhlu vinutí  $\alpha$ . Jestliže bude rám zatížen tahem, tlakem, ohybem či krutem lze působící silové zatížení vyjádřit obecnými rovnicemi podle vztahu (3.3.9).

$$\left. \begin{aligned} F_N &\approx F_T = 2\pi r h \sigma_{N,T} \\ M_{oy} &= \int_A \sigma_{oz} \frac{x}{r} \cdot x dA = \frac{\sigma_{oz}}{x} \cdot J_y \\ M_k &= 2\pi r h \tau_{xy} r \end{aligned} \right\}, \quad (3.3.9)$$

kde  $\sigma_{zz}$  je tahové nebo tlakové napětí,  $J_y$  je moment setrvačnosti průřezu s plochou  $A$  k ose  $y$ ,  $\tau_{xy}$  je napětí v krutu v rovině  $xy$ ,  $r$  je poloměr.

Pro tahové, tlakové a ohybové namáhání bude optimální úhlová orientace vinutí  $\alpha = 0^\circ$ , tj. podélně kladená vlákna ve směru osy jádra, což bylo patřičně vysvětleno v předešlých kapitolách. Proto **optimalizační úlohu provedeme pro zatížení rámu krutem**. Řešení této úlohy je příkladové znázornění systémového řešení hledající ideální řešení z dané funkční množiny reálných řešení. Definujme cílovou (kriteriální) funkci

$f(\hat{\mathbf{p}}) = f(\hat{\mathbf{C}}, \hat{\sigma})$ , jejímž parametrem je nalezení maximální tuhosti  $\hat{\mathbf{C}}$  při maximálním působícím napětí  $\hat{\sigma}$ , což lze vyjádřit vztahem (3.3.10).

$$f(\hat{\mathbf{C}}, \hat{\sigma}) = \arg \min_{\mathbf{C} \in \mathcal{h}} \min_{\sigma \in \mathcal{K}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} d\Omega, \quad (3.3.10)$$

kde  $C_{ijkl} = C_{ijkl}^\nu$  je tenzor elastických konstant pro danou vrstvu, přičemž pro jednu vrstvu je  $\nu=1$ , tenzor napětí  $\sigma_{ij} = l_{ik}^\nu l_{jl}^\nu \sigma_{kl}^\nu$  a obdobně to bude platit i pro tenzor deformace

$\varepsilon_{ij} = l_{ik}^\nu l_{jl}^\nu \varepsilon_{kl}^\nu$  resp.  $\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}^\nu \sigma_{kl}^\nu$ ,  $l_{ik}^\nu = \begin{pmatrix} \cos \alpha^\nu & \sin \alpha^\nu \\ -\sin \alpha^\nu & \cos \alpha^\nu \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{h}$  je množina všech reálných

elastických konstant vztažených k tuhosti pro dané směrové vinutí,  $\lambda$  je množina všech napětí od působícího zatížení rámu, tedy pro prostý krut bude platit

$$\lambda = \left( \sigma_{11} = 0, \sigma_{22} = 0, \tau_{12} = \frac{M_k}{2\pi r^2 h} \right) \quad \text{a pro tenzor napětí rozvinutého pláště}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{12} \\ \tau_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Součin  $C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$  lze vyjádřit ve tvaru  $C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = (C_{1212} + C_{1221} + C_{2112} + C_{2121})\tau_{12}^2$ , kde bude za ideálních předpokladů dokonale rovnoměrné kompozitní struktury platit rovnost  $C_{1212} = C_{1221} = C_{2112} = C_{2121}$ . V tenzorovém zápise lze následně výraz  $C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = (C_{1212} + C_{1221} + C_{2112} + C_{2121})\tau_{12}^2$  vyjádřit v obecnějším tvaru podle vztahu (3.3.11).

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 4\tau_{12}^2 l_{1m}^v l_{2n}^v C_{mnop}^v l_{1o}^v l_{2p}^v. \quad (3.3.11)$$

Pro jednodušší orientaci v tenzorovém zápise zavedeme  $c^v = \cos \alpha$  a  $s^v = \sin \alpha$ , přičemž bude platit  $c^{v^2} + s^{v^2} = 1$ ,  $l_{ik} = \delta_{ik}c^v + \epsilon_{ik}s^v$ , kde  $\delta_{ij}$  je kroneckerova delta,  $\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

je Levi-Cevitův antisymetrický tenzor, který je vyjádřen pro dvourozměrnou úlohu definovanou rozvinutím pláště. Bude platit vzájemná propojenost mezi  $\delta_{ij}$  a  $\epsilon_{ij}$ , tj. bude

$$\text{platit } \epsilon_{ij}\epsilon_{lm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Následně lze vyjádřit (3.3.11) podle}$$

vztahu (3.3.12) resp. (3.3.13).

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 4\tau_{12}^2 (\delta_{1m}c^v + \epsilon_{1m}s^v)(\delta_{2n}c^v + \epsilon_{2n}s^v)C_{mnop}^v (\delta_{1o}c^v + \epsilon_{1o}s^v)(\delta_{2p}c^v + \epsilon_{2p}s^v) \quad (3.3.12)$$

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 4\tau_{12}^2 (A_1^v c^{v^4} + A_2^v c^{v^3}s^v + A_3^v c^{v^2}s^{v^2} + A_4^v c^v s^{v^3} + A_5^v s^{v^4}) \quad (3.3.13)$$

kde

$$\begin{aligned} A_1^v &= C_{mnop}^v \delta_{1m} \delta_{2n} \delta_{1o} \delta_{2p} = C_{1212}^v, \\ A_2^v &= C_{mnop}^v (\epsilon_{1m} \delta_{2n} \delta_{1o} \delta_{2p} + \delta_{1m} \epsilon_{2n} \delta_{1o} \delta_{2p} + \delta_{1m} \delta_{2n} \epsilon_{1o} \delta_{2p} + \delta_{1m} \delta_{2n} \delta_{1o} \epsilon_{2p}) = \\ &= 2C_{m212}^v \epsilon_{1m} + 2C_{121p}^v \epsilon_{2p} = 2C_{2212}^v - 2C_{2212}^v = 0, \\ A_3^v &= C_{1111}^v + C_{2222}^v - 2C_{1122}^v - 2C_{1221}^v, \\ A_4^v &= C_{1121}^v - C_{2221}^v + C_{2111}^v - 2C_{2122}^v = 0, \\ A_5^v &= C_{2121}^v = A_1^v. \end{aligned}$$

Vyjádřením  $A_i^v$  se zkrátí vztah (3.3.13) na rovnici (3.3.14).

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 4\tau_{12}^2 (A_1^v c^{\nu^4} + A_3^v c^{\nu^2} s^{\nu^2} + A_5^v s^{\nu^4}). \quad (3.3.14)$$

Dosažením (3.3.14) do (3.3.10) nabývá řešení minima podle vztahu (3.3.15). Jestliže zavedeme substituci  $a_j = c^{\nu^2} \Big|_{a_j \in \langle 0,1 \rangle}$  a zároveň bude platit  $s^{\nu^2} = 1 - a_j$ , pak (3.3.15) lze přepsat po úpravě do výsledného tvaru (3.3.16), přičemž bod extrému hledaného optima nebude záviset na násobku cílové funkce kladnou konstantou, tedy v tomto případě  $4\tau_{12}^2$ . Je to dáno tím, že hledáme optimální úhlovou orientaci pro maximální tuhost při maximálním zatížení krutem. Protože nalezení extrému bude závislé pouze na  $a_j$ , lze pak výslednou rovnici pro nalezení lokálního extrému přepsat do tvaru podle (3.3.17).

$$\min_{c^v, s^v \in h_j} 4\tau_{12}^2 (A_1^v c^{\nu^4} + A_3^v c^{\nu^2} s^{\nu^2} + A_5^v s^{\nu^4}), \quad (3.3.15)$$

$$\min_{a_j \in \langle 0,1 \rangle} [A_1^v + (A_3^v - 2A_1^v)a_j + (2A_1^v - A_3^v)a_j^2], \quad (3.3.16)$$

$$\min_{a^v \in \langle 0,1 \rangle} [A^v a_j - A^v a_j^2], \quad (3.3.17)$$

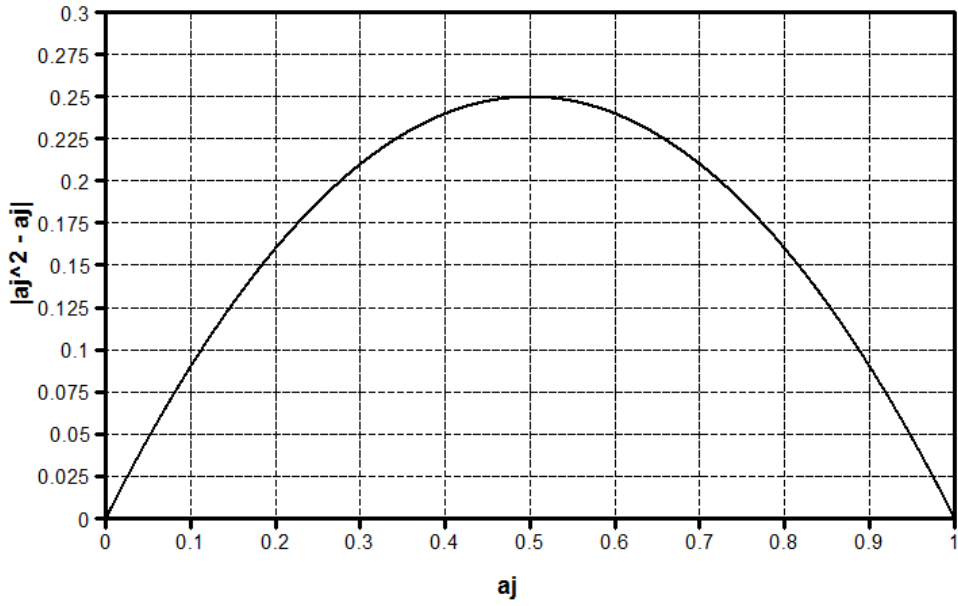
kde  $A^v = A_3^v - 2A_1^v = C_{1111}^v + C_{2222}^v - 2C_{1122}^v - 2C_{1221}^v - 2C_{1212}^v$ .

$A^v$  je tedy konstantní hodnotou elastických vlastností v krutu dané kompozitní struktury, která jak uvádí Mareš [43] či Gurdal [52] má hodnotu  $A^v < 0$ , což je vyjádřením  $A^v$  patrné. Proto vztah (3.3.17) lze přepsat do minimalizace funkce platící pro absolutní hodnotu podle vztahu (3.3.18), z čeho extrémní (stacionární) bod bude splňovat podmínku podle (3.3.19).

$$\min_{a_j \in \langle 0,1 \rangle} |a_j^2 - a_j|, \quad (3.3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_j} (a_j^2 - a_j) = 0 \Rightarrow a_j = \frac{1}{2}. \quad (3.3.19)$$

Získáním stacionárního bodu  $a_j = \frac{1}{2}$  dostaneme zpětnou substitucí ( $a_j = c^{\nu^2}$ , přičemž  $c^v = \cos \alpha^v$ ) optimální úhel navinutí vlákenného pramence pro libovolné zatížení v krutu  $\alpha^v = \pm 45^\circ$  resp. totéž bude platit i pro úhly  $\alpha^v = 135^\circ$ ,  $\alpha^v = 225^\circ$  a  $\alpha^v = 315^\circ$ . Grafické vyjádření vztahu (3.3.18) nabývajících extrémních hodnot  $a_j$  je uvedeno na obr. 3.3.9.



**Obr. 3.3.9.** Závislost  $|a_j^2 - a_j|$  na  $a_j$  pro stanovení optimálního úhlu navinutí vlákenného pramence pro maximální tuhost při maximálním zatížení krutem.

Lze teoreticky dokázat, že optimální navinutí vlákenných pramenců pod úhlem  $\alpha^{\nu=1} = \alpha = \pm 45^\circ$  v rámu z kompozitu o délce  $m$  při zatížení krutem neplatí pouze pro jednu vrstvu, ale platí to i pro  $j$ -tý počet vrstev s  $m$  – počtem vlákenných pramenců. Dokážeme to na příkladu, kde budeme vycházet z (3.3.10), přičemž pro napětí v krutu  $\sigma_{xy} = \tau_{12}$  bude platit rovnice (3.3.20), která rozšiřuje vyjádření pro  $M_k$  z (3.3.9).

$$M_k = \sum_{\nu=1}^n 2\pi\tau_{12} \int_{r+(\nu-1)H}^{r+\nu H} r^2 dr = \sum_{\nu=1}^n \tau_{12} \frac{2\pi}{3} \left( (r+\nu H)^3 - (r+(\nu-1)H)^3 \right) = \sum_{\nu=1}^n \tau_{12} S^\nu, \quad (3.3.20)$$

kde  $H$  je tloušťka  $n$ -té  $\nu$  vrstvy vlákenných pramenců,  $S^\nu = \frac{2\pi}{3} \left( (r+\nu H)^3 - (r+(\nu-1)H)^3 \right)$ .

Následně bude množinu všech napětí působících v  $n$  počtu vrstev rámu  $\tilde{\lambda}^m$  možné vyjádřit ve tvaru  $\tilde{\lambda}^m = \left( \tau_{12} \ (j=1,2,\dots,n) \mid \sum_{j=1}^n \tau_{12} S^\nu \right)$ . Dále úloha přechází do hledání cílové funkce  $\mathbf{c}$ , jenž vychází z (3.3.11) a (3.3.14) a lze jí přepsat do vztahu (3.3.21).

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{r+(\nu-1)H}^{r+\nu H} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} 2\pi r dr = \\ &= \frac{2\pi m}{2} \sum_{j=1}^n \int_{r+(\nu-1)H}^{r+\nu H} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} r dr = \pi m \sum_{j=1}^n 4\tau_{12}^2 \left( A_1^\nu c^{\nu 4} + A_3^\nu c^{\nu 2} s^{\nu 2} + A_5^\nu s^{\nu 4} \right) \int_{r+(\nu-1)H}^{r+\nu H} r dr = (3.3.21) \\ &= 4\pi m \sum_{j=1}^n \tau_{12}^2 \left( A_1^\nu c^{\nu 4} + A_3^\nu c^{\nu 2} s^{\nu 2} + A_5^\nu s^{\nu 4} \right) B_r, \end{aligned}$$

$$\text{kde } B_r = \int_{r+(v-1)H}^{r+vH} r dr = \frac{1}{2} \left( (r+vH)^2 - (r+(v-1)H)^2 \right) = \frac{1}{2} (2rH + 2vH^2 - H^2).$$

Stanovení minima funkce docílíme podle vztahu (3.3.22).

$$\min_{c^\nu, s^\nu \in \mathcal{H}_s} \min_{\tau_{12} \in \tilde{\lambda}^m} \mathbf{c}, \quad (3.3.22)$$

$$\text{kde } \mathcal{H}_s = \left( c^\nu, s^\nu \mid (j=1,2,\dots,n) \mid c^\nu + s^\nu = 1 \right) \text{ a } \tilde{\lambda}^m = \left( \tau_{12}^\nu \mid (\nu=1,2,\dots,n) \mid \sum_{\nu=1}^n \tau_{12}^\nu S^\nu \right).$$

Alexej a kol. [53] uvádí, že pro řešení (3.3.22) lze využít Lagrangeových multiplikátorů pro úlohy s rovnostmi a nerovnostmi podle (3.3.23).

$$f_0(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad f_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{a} \quad f_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i=1,2,\dots,m), \quad (3.3.23)$$

kde prostřednictvím  $\hat{\mathbf{x}}$  lze realizovat lokální minimum  $\mathbf{x}$ .

Podle Rektoryse [39] definujeme Banachův prostor jako  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{O}$  jako otevřenou množinu v  $\mathbf{X}$ , přičemž bude platit  $f_i : \mathbf{O} \rightarrow \mathfrak{R} \quad (i=1,2,\dots,m)$  jsou diferencovatelné v bodě  $\hat{\mathbf{x}}$ . Pak existují takové Lagrangeovy multiplikátory  $\tilde{\mathfrak{S}} = (\tilde{\mathfrak{S}}_1, \tilde{\mathfrak{S}}_2, \dots, \tilde{\mathfrak{S}}_m) \in \mathfrak{R}^m$ ,  $\tilde{\mathfrak{S}}_0 \in \mathfrak{R}$ , že bude platit podmínka stacionárnosti Lagrangeovy funkce podle (3.3.24).

$$\left. \begin{aligned} E(\mathbf{x}, \tilde{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathfrak{S}}_0) &= \sum_{i=0}^m \tilde{\mathfrak{S}}_i f_i(\mathbf{x}) \\ E(\hat{\mathbf{x}}, \tilde{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathfrak{S}}_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.24)$$

Následně (3.3.24) rozepíšeme problém podle (3.3.22) vztahem (3.3.25), přičemž uvažováním konstantního napětí v celé délce vzorku rámu nebude Lagrangeův multiplikátor záležet na konstantě  $4\pi m$ . Následně stanovení minima v jednotlivých vrstvách  $\nu$  bude závislé na nalezení minima  $\tau_{12}^\nu, c^\nu, s^\nu$  podle vztahů (3.3.26 – 3.3.28).

$$E = \sum_{j=1}^n \tau_{12}^{\nu 2} (A_1^\nu c^{\nu 4} + A_3^\nu c^{\nu 2} s^{\nu 2} + A_5^\nu s^{\nu 4}) B_r + \lambda \left( \sum_{\nu=1}^n \tau_{12}^\nu S^\nu - M_k \right) + \sum_{\nu=1}^n \lambda^\nu (c^{\nu 2} + s^{\nu 2} - 1), \quad (3.3.25)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \tau_{12}^\nu} = 2\tau_{12}^\nu (A_1^\nu c^{\nu 4} + A_3^\nu c^{\nu 2} s^{\nu 2} + A_5^\nu s^{\nu 4}) B_r + \lambda S^\nu = 0, \quad (3.3.26)$$

$$\frac{\partial E}{\partial c^\nu} = \tau_{12}^{\nu 2} (4A_1^\nu c^{\nu 3} + 2A_3^\nu c^{\nu 2} s^{\nu 2}) B_r + \lambda^\nu 2c^\nu = 0, \quad (3.3.27)$$

$$\frac{\partial E}{\partial s^\nu} = \tau_{12}^{\nu 2} (4A_5^\nu s^{\nu 3} + 2A_3^\nu c^{\nu 2} s^{\nu 2}) B_r + \lambda^\nu 2s^\nu = 0. \quad (3.3.28)$$



Rovnice (3.3.26 – 3.3.28) budou nabývat hledaného extrému pouze v případě splnění počátečních podmínek, že  $M_k = \sum_{\nu=1}^n \tau_{12}^{\nu} S^{\nu}$ ,  $c^{\nu} + s^{\nu} = 1 \Big|_{(\nu=1,2,\dots,n)}$ , a  $B_r > 0$ , přičemž budeme předpokládat vzhledem k znalostem získaných z namáhání krutem jedné vrstvy (obr. 3.3.9), že  $c^{\nu} \neq 0, s^{\nu} \neq 0$ . Jestliže rovnici (3.3.27) vynásobíme výrazem  $1/c^{\nu}$  a rovnici (3.3.27) výrazem  $1/s^{\nu}$  a následně provedeme odečtení s uvažováním, že platí  $A_5^{\nu} = C_{2121}^{\nu} = A_1^{\nu}$  získáme vztah (3.3.29) resp. (3.3.30) při uvažování podmínky  $B_r > 0$ .

$$\tau_{12}^{\nu 2} (4A_1^{\nu} c^{\nu 2} + 2A_3^{\nu} s^{\nu 2} - 4A_1^{\nu} s^{\nu 2} - 2A_3^{\nu} c^{\nu 2}) B_r = 0, \quad (3.3.29)$$

$$\tau_{12}^{\nu 2} [c^{\nu 2} (4A_1^{\nu} - 2A_3^{\nu}) - s^{\nu 2} (4A_1^{\nu} - 2A_3^{\nu})] = 0. \quad (3.3.30)$$

Protože je kompozitní rám zatížen krutem bude v jednotlivých vrstvách platit  $\tau_{12}^{\nu} \neq 0 \Big|_{\nu=1,2,\dots,n}$  a  $4A_1^{\nu} - 2A_3^{\nu} \neq 0 \Big|_{\nu=1,2,\dots,n}$ , potom plyne z (3.3.30) vztah (3.3.31).

$$c^{\nu 2} - s^{\nu 2} = 0. \quad (3.3.31)$$

Ze vztahu (3.3.31) následně dostáváme  $c^{\nu 2} = s^{\nu 2} = a_j = \frac{1}{2}$ .

Tedy opět se získává hodnota stacionárního bodu  $a_j = \frac{1}{2}$ , která definuje optimální úhel navinutí vlákenného pramence v jednotlivých vrstvách  $\nu$  pro libovolné zatížení v krutu  $\alpha^{\nu} = \pm 45^{\circ}$ , resp. totéž bude platit i pro úhly  $\alpha^{\nu} = 135^{\circ}$ ,  $\alpha^{\nu} = 225^{\circ}$  a  $\alpha^{\nu} = 315^{\circ}$  vzhledem k směru střednice rámu.

Z uvedených vztahů se může jevit, že cílové řešení je nezávislé na mechanických vlastnostech rámu. Tento fakt je jen zdánlivý, neboť anizotropní resp. ortotropní vlastnosti se promítly do úpravy vztahu  $C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$ . Proto dosazením získaného řešení do (3.3.26) získáváme pro jednotlivé vrstvy vyjádření pro  $\tau_{12}^{\nu}$  podle (3.3.32) a pro Lagrangeovu konstantu  $\lambda$  dle vztahu (3.3.33).

$$2\tau_{12}^{\nu} (A_1^{\nu} c^{\nu 4} + A_3^{\nu} c^{\nu 2} s^{\nu 2} + A_5^{\nu} s^{\nu 4}) B_r + \lambda_{\nu} S^{\nu} = 0 = 2\tau_{12}^{\nu} \left( \frac{1}{4} A_1^{\nu} + \frac{1}{4} A_3^{\nu} + \frac{1}{4} A_1^{\nu} \right) B_r + \lambda S^{\nu} \Rightarrow \tau_{12}^{\nu} = - \frac{\lambda S^{\nu}}{\left( A_1^{\nu} + \frac{1}{2} A_3^{\nu} \right) B_r}, \quad (3.3.32)$$

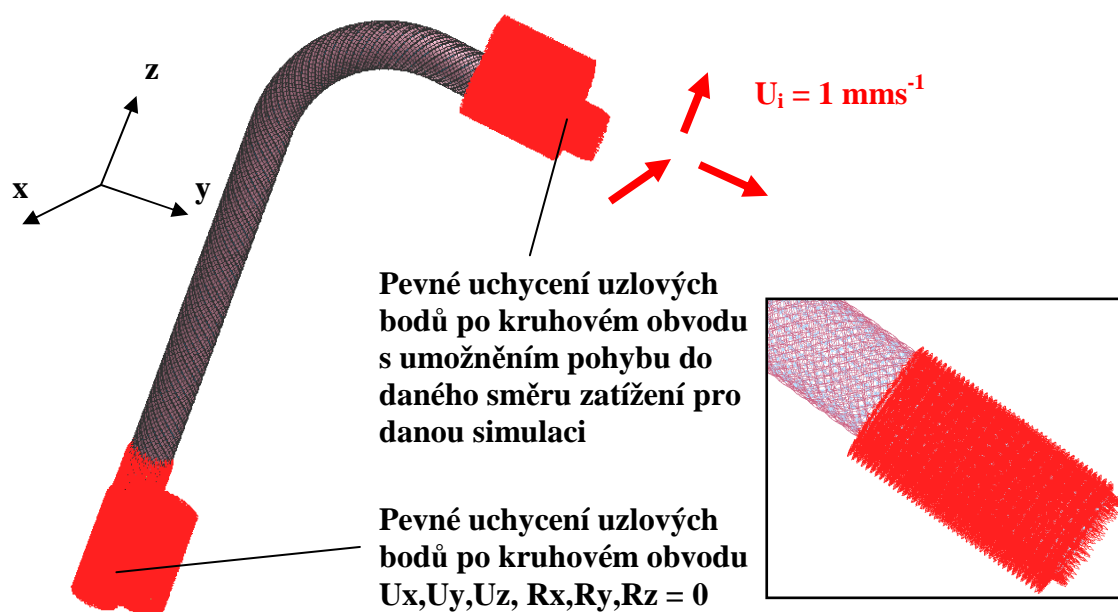
$$M_k = \sum_{\nu=1}^n \tau_{12}^{\nu} S^{\nu} = -S^{\nu} \frac{\lambda S^{\nu}}{\left( A_1^{\nu} + \frac{1}{2} A_3^{\nu} \right) B_r} \Rightarrow \lambda = - \frac{M_k \left( A_1^{\nu} + \frac{1}{2} A_3^{\nu} \right) B_r}{S^{\nu 2}}. \quad (3.3.33)$$

Hledáním ideálního úhlu vinutí vlákenných pramenců jednotlivých vrstev  $\alpha^{\nu}$  pro maximalizaci tuhosti při působícím zatížení se získaly informace o tom, že pro tah, tlak,

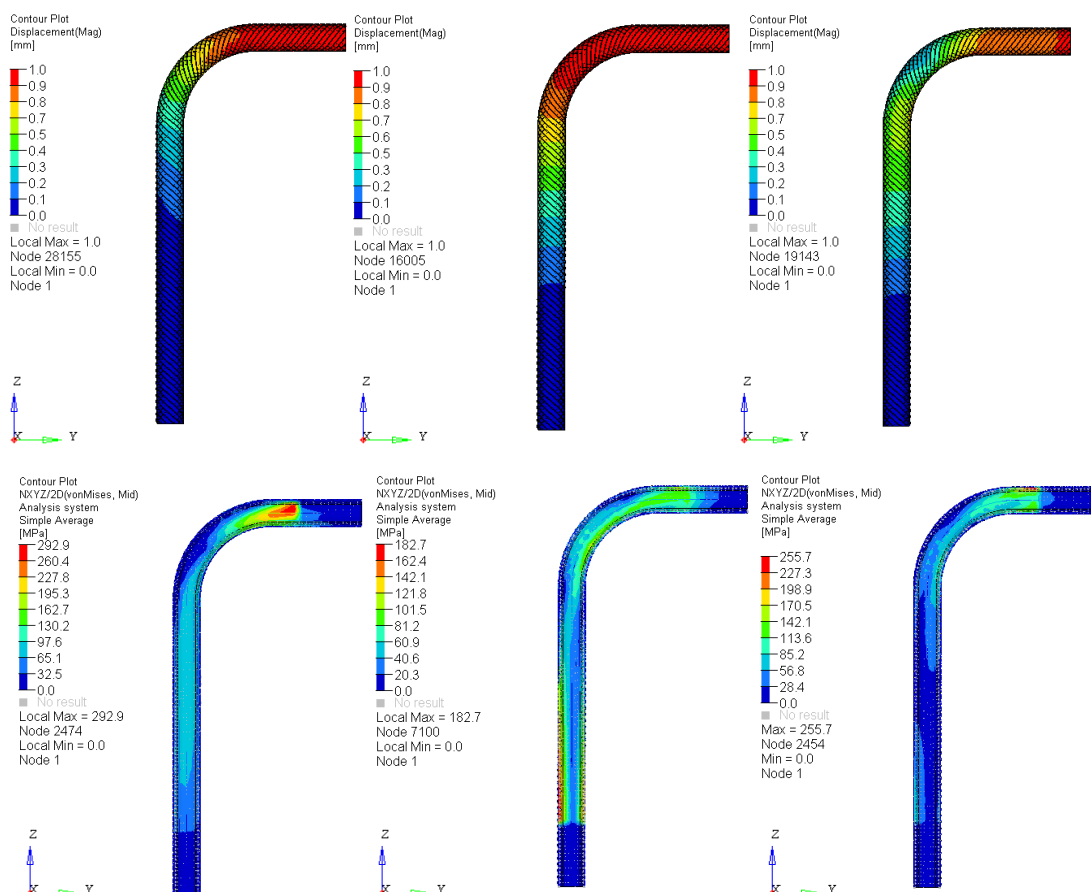
ohyb bude optimální úhlová orientace vinutí  $\alpha^v = 0^\circ$  a pro zatížení krutem bude  $\alpha^v = \pm 45^\circ$ . Z toho plyne, že vlivem ortotropních vlastností jednotlivých vrstev by bylo vhodné rámy či rámové kompozitní konstrukce navrhovat s více vrstvami, kde pro nahodilost zatížení (pseudonáhodné zatížení, kombinované zatížení, atd.), to bude odpovídat minimálně třem vrstvám  $v = 3$ . Výsledky dané řešením (3.3.10), však nevypoví o místech a oblastech s největším napětím, resp. okamžité rozložení působícího napětí, které zejména u křivých rámu nebude při daném zatížení konstantní. Proto je nutné provést numerickou simulaci rozložení napětí v jednotlivých částech křivého rámu pro ucelené výsledky.

## **II. Sestavení numerického modelu křivého rámu vyvíjeného z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny**

Vytvoření numerického modelu křivého rámu vyvíjeného z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny se provedlo s definovanou orientací vlákenných pramenců  $0^\circ$ ;  $+45^\circ$  a  $-45^\circ$  pro  $v = 3$ . Model se sestavil pro 3 různá zatížení do hlavních směrů základního souřadného systému  $x, y, z$  stanovující mechanické vlastnosti rámu nejen v tahu, ale i ohybu a krutu (obr. 3.3.10). Model měl definovány stejné materiálové parametry jako model rovného rámu, tj. uhlíková vlákna s epoxidovou matricí podle materiálových vlastností uvedených v tab. 2.5.2, kap. 2.5.2. Jádru mělo tyto parametry:  $\phi d = 40\text{ mm}$ ,  $m = 800\text{ mm}$  a vlákno:  $b = 10\text{ mm}$ ,  $h = 1\text{ mm}$ , přičemž délka vlákna je ovlivněná úhlem  $\alpha^v \Big|_{v=1,2,3}$  dané vrstvy. Síť konečných prvků byla vytvořena stejně jako v případě rovného rámu. Okrajové a počáteční podmínky jsou uvedeny na obr. 3.3.11, přičemž se v podstatě jedná o stejné okrajové podmínky jako u numerických modelů rovného rámu, jen s tím rozdílem, že je vždy pro danou simulaci definováno pro porovnávací vlastnosti posunutí do určitého směru  $U_i \Big|_{i=x,y,z} = 1\text{ mm}$  při rychlosti posunutí  $1\text{ mm.s}^{-1}$ . Uložení křivého rámu bylo provedeno na obou koncích pomocí uzlových bodů elementů po celém obvodu do vzdálenosti  $80\text{ mm}$  (délka odpovídá konstrukční velikosti reálných úchytných čelistí), jak je uvedeno v detailu na obr. 3.3.10. Velikost časového kroku výpočtu  $\Delta t$  je uvedena v tab. 3.3.1. Výsledky rozložení deformace a redukovaného napětí pro daný směr posunutí jsou uvedeny na obr. 3.3.11.

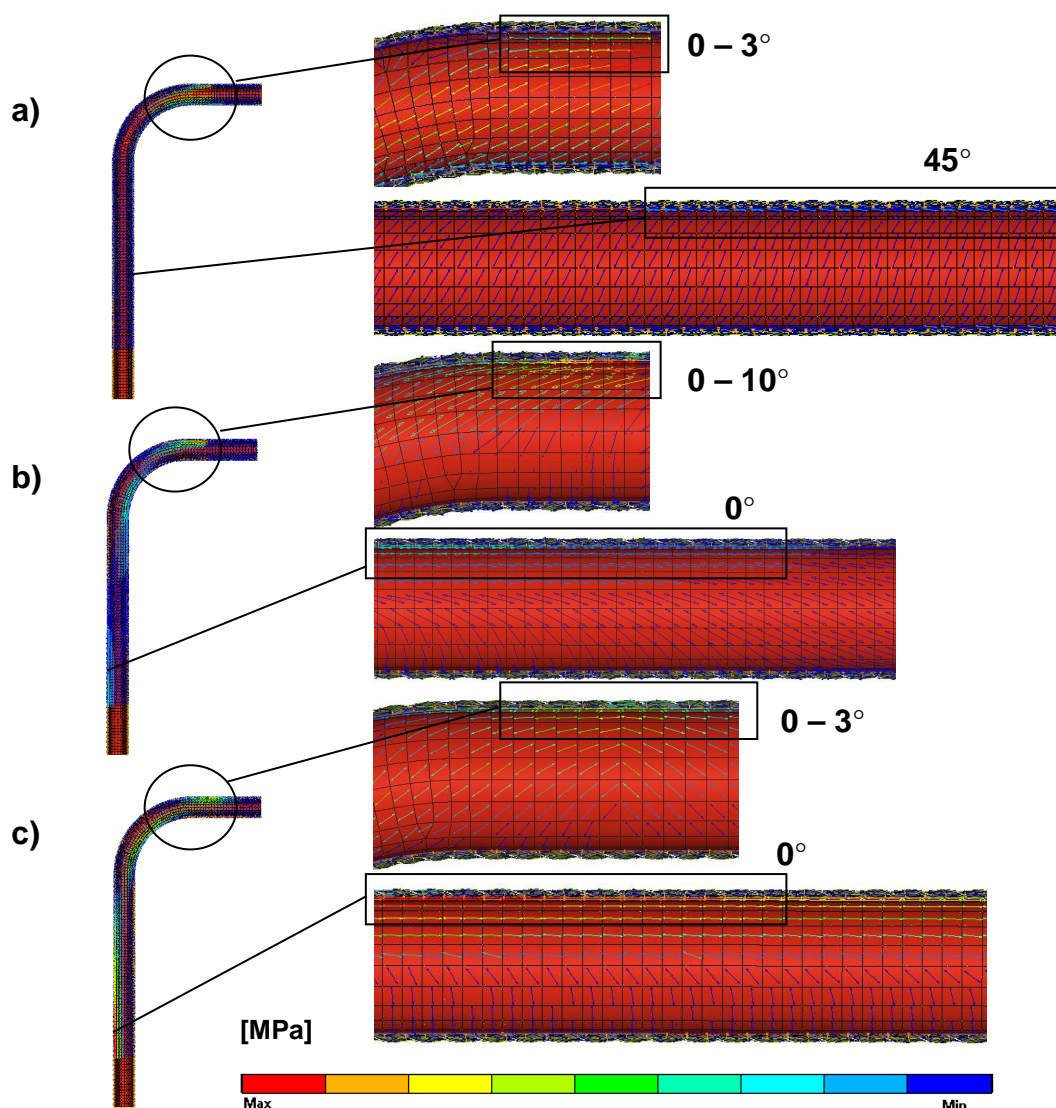


**Obr. 3.3.10.** Okrajové podmínky numerického modelu křivého rámu z vyvíjené kompozitní struktury s různou orientací a množstvím dlouhých vláken.



**Obr. 3.3.11.** Numerický model křivého rámu pro  $V^f = 0,5$  : výsledky rozložení vektorů deformace do směrů posunutí  $x, y, z$  (nahore), rozložení redukovaného napětí podle HMM hypotézy do směrů posunutí  $x, y, z$  (dole).

Výsledky numerických simulací pro  $V^f = 0,5$  uvedené na obr. 3.3.11 znázornily pro jednotlivá posunutí do směrů  $x, y, z = 1 \text{ mm}$  podle obr. 3.3.10 rozložení redukovaného napětí  $\sigma_{HMH}$  podle hypotézy HMH (Huber, Mises, Hencky). Při deformaci způsobené posuvem do směru osy  $x$  vzniká v křivém rámu maximální redukované napětí  $\sigma_{HMH} = 292,9 \text{ MPa}$ , které je způsobeno jednak ohybovým napětím a dále napětím v krutu. Deformací od posunutí do směru  $z$  je hodnota redukovaného napětí  $\sigma_{HMH} = 255,7 \text{ MPa}$ , jenž v rámu vytváří tahové napětí a ohybové napětí, přičemž při vyšší deformaci by mohlo dojít ke ztrátě stability. Deformace od posunutí do směru  $y$  způsobuje v rámu  $\sigma_{HMH} = 182,7 \text{ MPa}$ , přičemž to způsobuje tahové a ohybové napětí. Orientace a směr rozložení působení maximálního hlavního napětí pro dané zatížení je uvedeno na obr. 3.3.12. Z orientace a barevnosti šipek lze stanovit úhlový směr působení maximálního hlavního napětí v křivém rámu, kde maximum je vyjádřeno v detailech na obr. 3.3.12.



**Obr. 3.3.12.** Numerický model křivého rámu pro  $V^f = 0,5$ : Výsledky rozložení směru působení maximálního hlavního napětí pro jednotlivá zatížení: a) směr posunutí do osy  $x$ , b) směr posunutí do osy  $z$ , c) směr posunutí do osy  $y$ .

### 3.3.3 Shrnutí poznatků z MKP modelů rámců vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny

Vyhodnocením výsledků, které byly patřičně diskutovány, se získala řada poznatků pro vývojové řešení rámců z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny. Budou-li vlákenné pramence ovinuté na jádro rámu ve dvou vrstvách ve vzájemně kolmých směrech  $0^\circ$  a  $90^\circ$  vzhledem k střednici, přispívají příčná vlákna k podélné pevnosti při tahu jen minimálně, ale jejich příspěvek do výsledné pevnosti se začne zvyšovat s orientací úhlu směrem k  $0^\circ$ . Pro zatížení vnitřním tlakem např. u nádob či zásobníků to bude platit naopak, resp. se zvyšováním směrové orientace bude zvyšovat tuhost. Celkově to lze shrnout do následujících bodů:

- Pro zatížení způsobující **tahové, tlakové a ohybové napětí v rámu** bude nejvhodnější pro maximální hodnotu tuhosti a pevnosti, aby vlákenné pramence měly směr vinutí  $\alpha^\nu = 0^\circ$ .
- Pro zatížení rámu **napětím v krutu** bude nejvhodnější pro optimální tuhost a pevnost, aby vlákenné pramence měly směr vinutí  $\alpha^\nu = 45^\circ$ .
- Pro zatížení rámu **vnitřním či povrchovým tlakem** bude nejvhodnější pro optimální tuhost a pevnost úhlová orientace  $\alpha^\nu = 90^\circ$ .

Obecně platí, že objemový podíl vlákenné výztuže  $V^f$  v kompozitním rámu zvyšuje výrazně tuhost a odpor proti deformaci a tedy hodnota napětí při tahovém zatížení poroste. Tím také poroste celková hmotnost rámu, neboť vlákna mají vyšší hustotu než matrice. Nelze však jednoznačně konstatovat, že nutně zvyšováním objemového množství vláken  $V^f$  se bude dosahovat maximální pevnosti, neboť požadovaný synergický účinek kompozitní struktury nemusí vzniknout zvýšením množstvím vlákenné výztuže, ale nastane pouze optimálním množstvím a směrovým uspořádáním vlákenné výztuže. Pro nahodilost zatížení (pseudonáhodné zatížení, kombinované zatížení, atd.) a vlivem ortotropních vlastností jednotlivých vrstev je vhodné navrhovat kompozitní rámy minimálně s třemi vrstvami  $\nu = 3$  v kombinaci kladených vrstev vlákenných pramenců s orientací  $\alpha^{\nu=3} = 0^\circ; +45^\circ; -45^\circ$ . Zvyšování počtu vrstev bude vlivem synergie zvyšovat významně pevnost, která nebude lineární.

## 3.4 Výroba rámu vyvíjeného z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny

Výsledky numerických simulací uvedených v kap. 3.3 stanovily poznatky o rozložení napětí a deformace rovného i křivého rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny, které jsou ovinuté kolem otevřeného profilového jádra. Teorie a modely stanovily optimalizační parametry pro definování počtu vrstev a směru kladení vláknenných pramenců na jádro kruhového průřezu, jenž pro naše požadavky odpovídalo 3 vrstvám při směrovém uspořádání  $0^\circ$ ;  $+45^\circ$ ;  $-45^\circ$  <sup>(29)</sup>. Navinutí uvedených třech vrstev na rovný rám pomocí robotizované automatizace (kap. 3.2.2) je proces, který spočívá nejprve v navinutí podélných vláknenných pramenců ( $0^\circ$ ) a následně příčných vláknenných pramenců do jednoho směru ( $+45^\circ$ ) a nakonec do druhého směru ( $-45^\circ$ ). Tedy robot bude přímo držet jádro a zároveň s ním posouvat či rotovat (principiálně třikrát) při průchodu hlavou, jak bylo uvedeno na obr. 3.2.8, což při takto definovaném požadavku lze snadno výrobně provést. Určitý problém nastává při ovinutí podélných vláken na křivý rám, resp. ovinutí v oblasti ohybu z rovného úseku. Tento problém byl podrobně diskutován v autorově publikaci [42], kde princip spočívá v tom, že v oblasti ohybu se podélný vláknenný pramenec otočí o  $360^\circ$  a tím dojde k utažení resp. se pramenec zafixuje a nesklouzne. Tento problém lze také vyřešit i bez utažení podélného vlákna prostřednictvím automatického kladení všech vrstev vláknenných pramenců, tj. podélné i příčné vláknenné prameny, což by se docílilo modifikací navíjecí hlavy, jak bude přiblíženo dále v kap. 4. Výsledné profilové jádro ovinuté dlouhými uhlíkovými vlákny je uvedeno na obr. 3.4.1 vlevo, uložení do vstříkovací formy je uvedeno na obr. 3.4.1 vpravo.

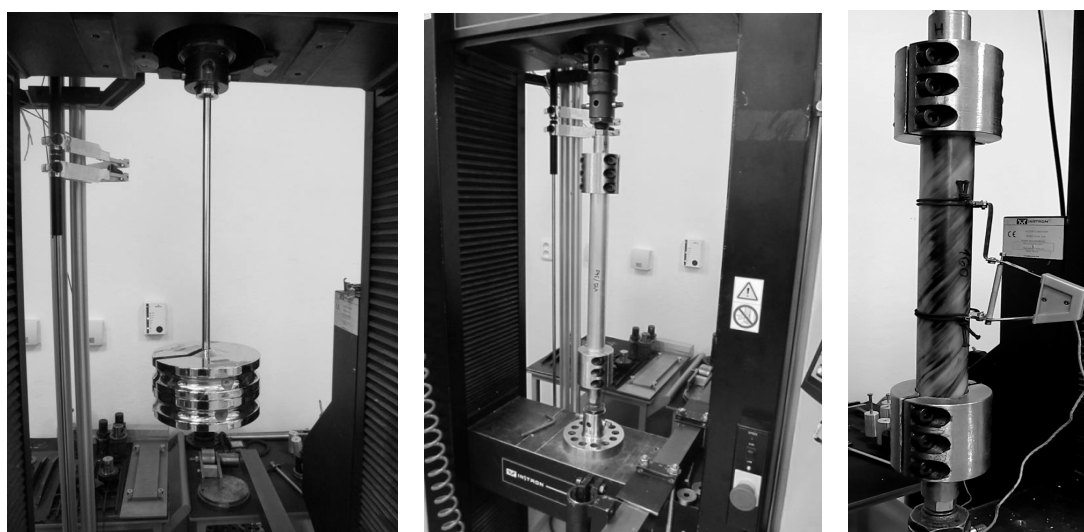


**Obr. 3.4.1.** Profilové jádro ovinuté dlouhými uhlíkovými vlákny (vlevo), uložení jádra ve vstříkovací formě (vpravo).

<sup>(29)</sup> Pozn. Počet vrstev a směrové uspořádání je závislé od typu a zatížení konstrukce (geometrický průřez jádra a oblast namáhání), proto nelze exaktně říci, že tento počet je optimální pro každý rám. Je tedy nutné vždy vycházet z modelových analýz pro daný typ a dané zatížení rámu, pro získání rozložení působícího napětí a deformace.

### 3.5 Porovnání numerických simulací a měření vyvíjených rámců z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny

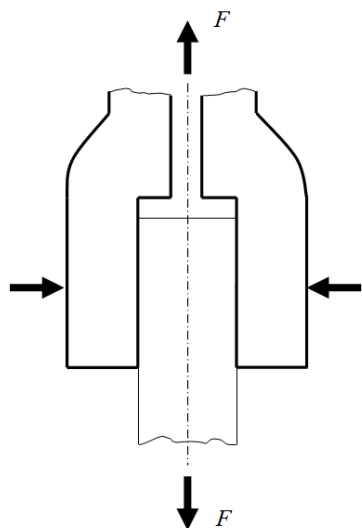
Měření mechanických vlastností vyrobených rámců vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny se provedla při stejných zatěžujících podmínkách jako u modelových simulací (kap. 3.5.1). Měření se provedla v laboratoři aplikované mechaniky, kde na trhačím zařízení byla nejprve provedena kalibrace rovinnosti měření, resp. stanovení souososti úchytných držáků pro čelisti (obr. 3.5.1). Je to dáno patřičnými geometrickými rozměry rovinných i křivých rámových konstrukcí, které jsou mnohonásobně větší, než v případě testovaných vzorků viz kap. 2.3. Souosost čelistí je důležitá zejména u rovinných rámců z hlediska minimalizace vzniku posouvající síly  $T$ .



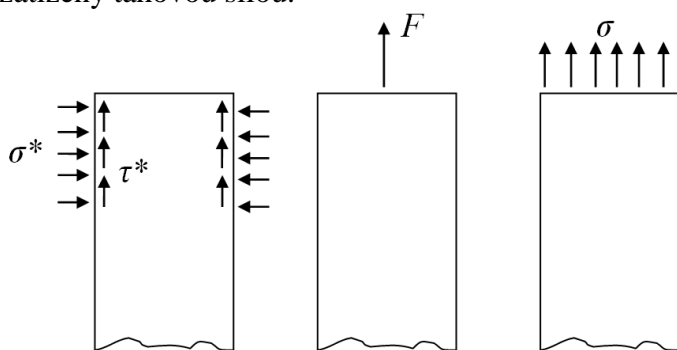
**Obr. 3.5.1.** Kalibrace měření pro odpovídající uložení čelistí (vlevo), testování souososti čelistí pomocí ocelové trubky (uprostřed), uspořádání měření s tenzometrem (vpravo).

Problém měření se projevuje v konstrukčním řešení čelistí pro uchycení vzorků rámců přesto, že se jedná o jednoduchý příklad okrajové úlohy obdobný problematice uložení vzorků viz kap. 2. Je to dáno tím, že geometrický vzorek kompozitního rámu má vysokou pevnost při mechanickém namáhání, vzhledem k tomu, aby se vzorek nevysunul z čelistí, musí se zajistit dostatečný přítlak. Konstrukční řešení čelistí lze zajistit např. provedením svěrného uložení (obr. 3.5.1 vpravo), které pro natažení  $\leq 1mm$ , lze dobře využít. Jestliže budeme testovat vzorek až do meze pevnosti resp. do přetržení vzorku, musíme vzorek natáhnout do vzdálenosti  $\geq 1mm$ , kde silové zatížení může dosahovat velikosti větší než 50kN. Vzhledem k těmto předpokladům bylo vhodné využít zkušebního zařízení umožňující měřit síly do 100 kN, jako je např. FU 250 (3.5.2), které vyvine sílu až 250 kN. Problém však nastal, že při využití svěrného uložení podle obr. 3.5.1 dochází k určité plastické deformaci, která bude ovlivňovat oblast kritického porušení, které nastane v oblasti uchycení. Proto takovéto uchycení neumožní objektivní analýzu mechanických vlastností nově vyvinutého kompozitního rámu. Provedl se návrh optimálního provedení konstrukce čelistí, kde se vycházelo ze známých informací. V ideálním případě souososti čelistí bude v testovaném vzorku rovné rámové konstrukce působit pouze osová síla

$F = 2\pi R h \sigma$ , kde  $R$  je poloměr kruhového jádra a  $h$  je tloušťka vláknenných vrstev s maticí. Jestliže uvolníme sestavu uvedenou na obr. 3.5.2 lze zavést reakční síly <sup>(30)</sup>, které budou odpovídat výslednému působení normálového a smykového napětí vznikajícího od



**Obr. 3.5.2.** Vzorek rámové konstrukce upnutý v čelistech zatížený tahovou silou.



**Obr. 3.5.3.** Působení normálového a smykového napětí (vlevo), směr silové výslednice (uprostřed), působení hlavního napětí (vpravo).

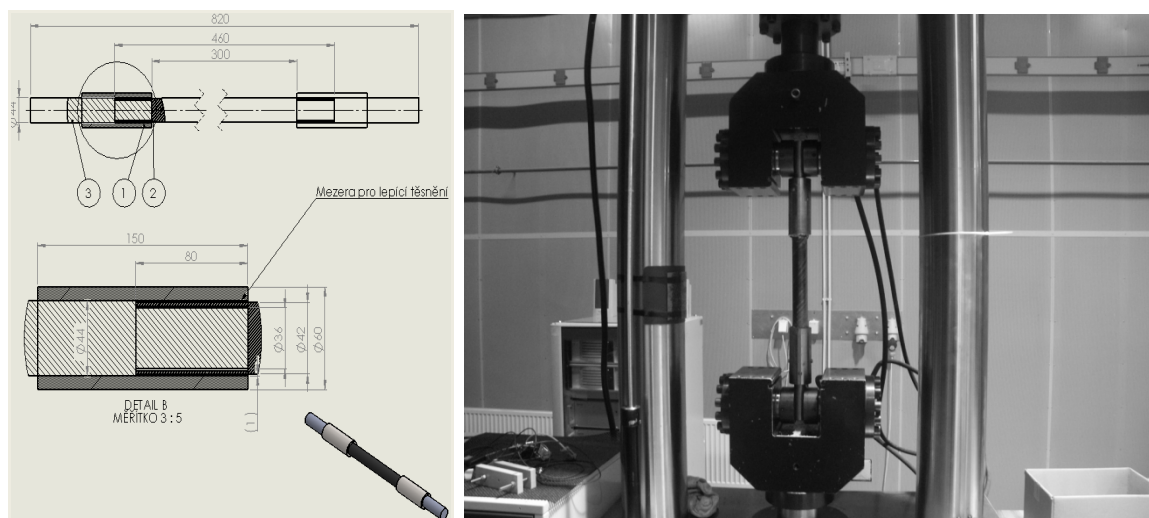
provedení není také ideální, neboť závisí na vhodné volbě a typu lepidla, ceně. Vzhledem k tomu bylo zkoušeno několik typů epoxidových lepidel (jednosložkových a vícesložkových). Nejlepšího výsledku bylo dosaženo s jednosložkovým rychle

velikosti přítláčné plochy čelistí, jak je znázorněno na obr. 3.5.3. Směr silové výslednice a rozložení hlavního napětí bude následně v ose zatížení, což je smyslem Saint – Venantova principu. Vzhledem k vysokému silovému zatížení bude přítláčné normálové napětí  $\sigma^*$  velké a bude zřejmě platit  $\sigma^* \gg \tau^*$ , proto by bylo vhodné toto napětí snížit, či v ideálním případě co nejvíce minimalizovat. Tento problém bude ještě složitější, pokud se bude jednat o napětí v krutu či kombinované namáhání. Vzhledem k těmto skutečnostem se využilo konstrukčního řešení čelistí podle obr. 3.5.4, se zajištěním prostřednictvím lepení tj. čelisti se spojily se vzorkem lepením, čímž vznikl spoj, který nezpůsobí porušení vzorku v čelistech. Samozřejmě, toto

<sup>(30)</sup> Pozn. Jedná se o zjednodušení skutečných fyzikálních podmínek, neboť pro přesné určení okrajových podmínek by se musela definovat kontaktní úloha, resp. odezva napjatosti a deformace obou dotýkajících se těles, tj. vzorku i čelistí. Je to dáno tím, že ve stykové oblasti na sebe působí obě tělesa podle principu akce a reakce, a protože ani čelisti nejsou absolutně tuhé, bude docházet za určitých podmínek i k jejich deformaci.



schnoucím epoxidovým lepidlem Cyberbond CA 2000er Serie (1000-2999), kde lepená vazba vydržela až do maximálního porušení vzorku <sup>(31)</sup>, jak je uvedeno na obr. 3.5.5.



**Obr. 3.5.4.** Uložení vzorku rámové konstrukce do čelistí prostřednictvím lepeného spoje.



**Obr. 3.5.5.** Ukázka porovnání plastické deformace vzorku rámové konstrukce uložené v čelistech: svěrné uložení (vlevo), lepené uložení (vpravo).

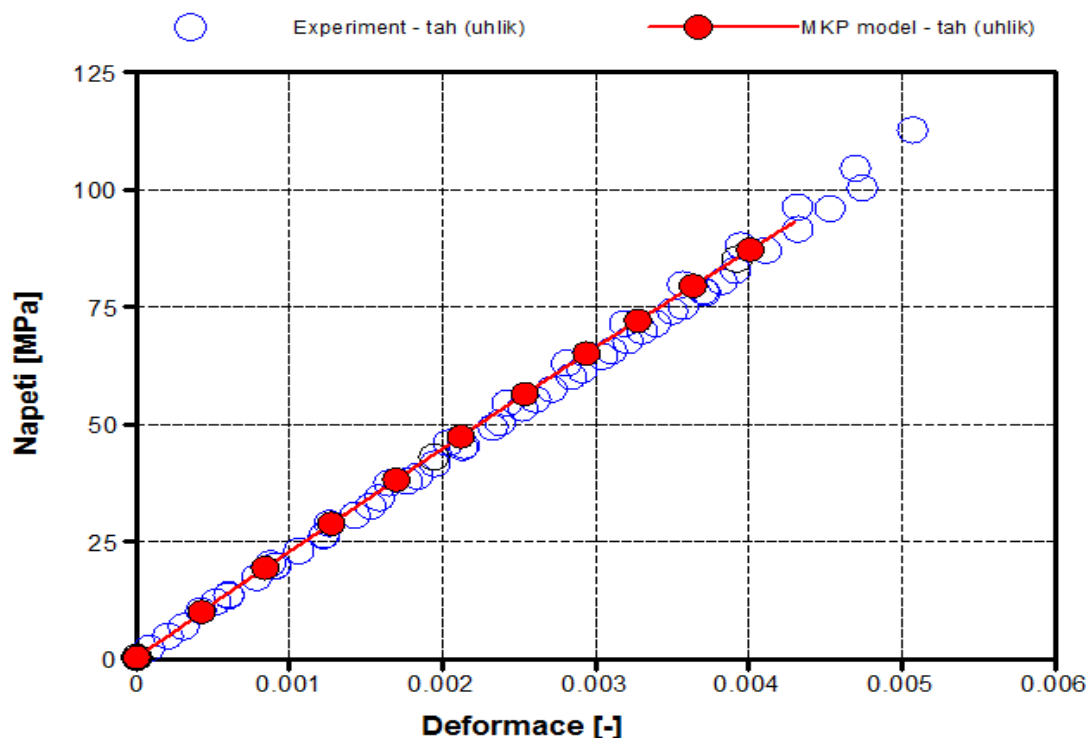
Samotné výsledky měření jsou ovlivněné způsobem a vyhodnocováním měření (průměrování a filtrace dat, vliv čelistí, vliv extenzometru), jak bylo diskutováno například v publikacích Lufinka a Petrů, [38] a [54]. Výsledná data byla vždy také statisticky porovnána prostřednictvím metody ANOVA. Výsledky získané ANOVOU na

<sup>(31)</sup> Vzorek lepeného spoje lze následně demontovat prostřednictvím teplotního zahřátí, což se provedlo v tepelné komoře, čímž se zbytky vzorku v čelistech uvolní a čelisti tímto způsobem lze opět použít pro další testování a měření.

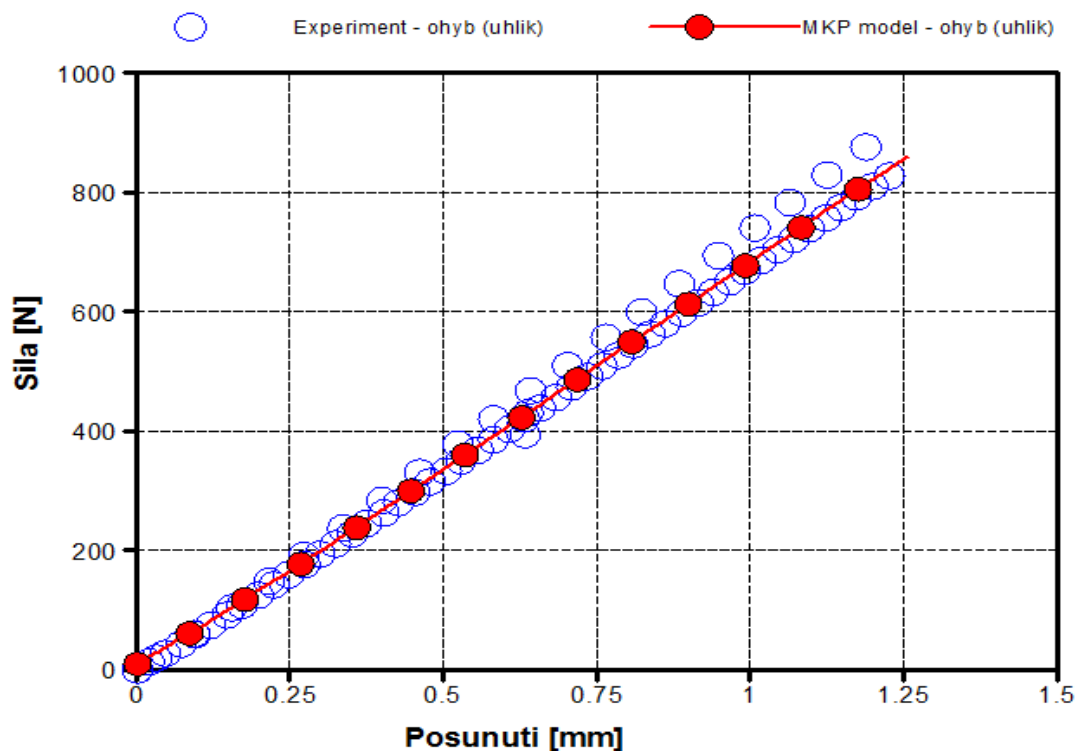
hladině významnosti 0,05 jsou uvedeny v tabulce 3.5.1. Z příkladových výsledků statistické analýzy pro objemové zaplnění  $V^f \approx 0,3$  je zřejmé, že výsledky získané z MKP modelů jsou statisticky významné a mohou být použity pro popis mechanického chování vzorků kompozitních rámců.

**Tab. 3.5.1.** Statistická analýza vybraných MKP modelů a experimentálních vzorků rámců z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny.

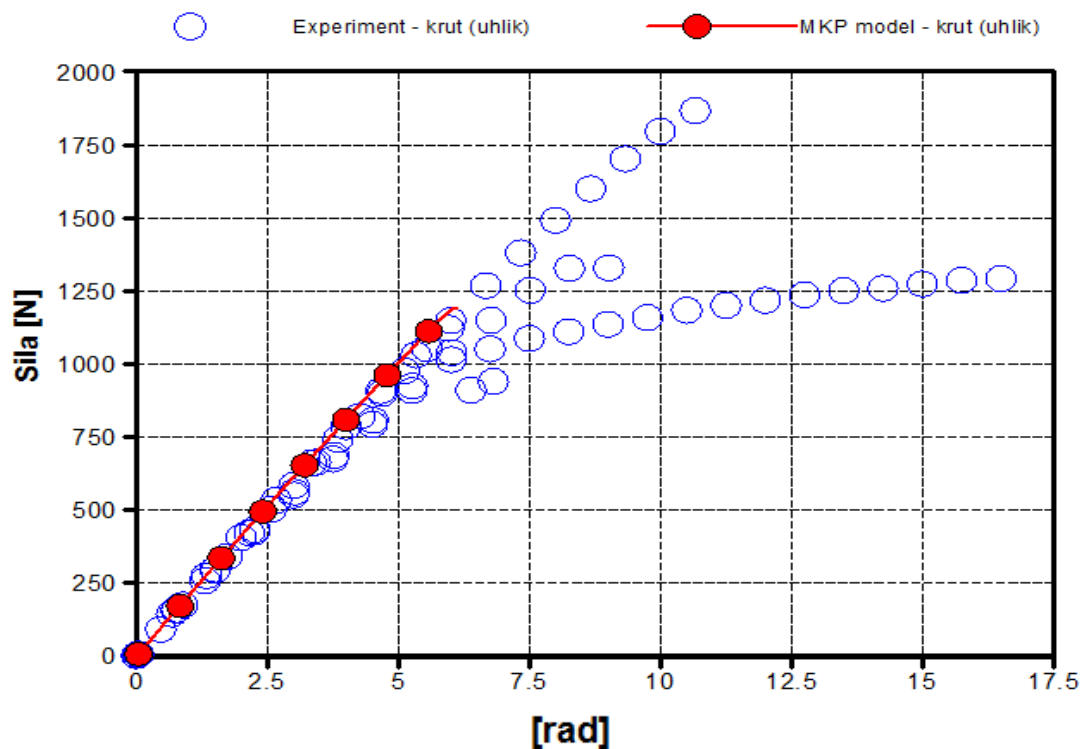
Model	$F_{rat}$ [-]	$P_{hodnota}$ [-]	$F_{krit}$ [-]	$R^2$ [-]
MKP model – tah  $V^f \approx 0,3$	0,017	0,931	3,672	0,993
MKP model - ohyb  $V^f \approx 0,3$	0,0785	0,901	3,672	0,982
MKP model - krut  $V^f \approx 0,3$	0,0923	0,845	3,672	0,967



**Obr. 3.5.6.** Porovnání výsledků experimentů a MKP modelu vzorků rovného rámu s objemovým zaplněním  $V^f \approx 0,3$  v tahu: průběh napětí v závislosti na poměrné deformaci vzorku rámu.



**Obr. 3.5.7.** Porovnání výsledků experimentů a MKP modelu vzorků rovného rámu s objemovým zaplněním  $V^f \approx 0,3$  v ohybu: průběh síly v závislosti na posunutí vzorku rámu.



**Obr. 3.5.8.** Porovnání výsledků experimentů a MKP modelu vzorků rovného rámu s objemovým zaplněním  $V^f \approx 0,3$  v krutu: průběh síly v závislosti na zkroucení vzorku rámu.

Měření ukazují v porovnání s numerickými simulacemi podobný trend silové odezvy, který se projevuje přibližně lineární závislostí, jak je patrné na obr. 3.5.6 – 3.5.8. Z obr. 3.5.6 je zřejmé, že tahové napětí v závislosti na deformaci, jenž bylo stanovené z extenzometru, nemělo u jednotlivých testovaných vzorků nikdy úplně shodný (totožný) průběh. Obdobně je to patrné z obr. 3.5.7, kde je uvedena závislost síly na posunutí při ohybovém namáhání. Je to zřejmě dáno tím, že vzorky rámu jsou sice vyrobeny se stejným objemovým zaplněním  $V^f \approx 0,3$ , ale vliv propojení vláken s matricí určující synergický účinek je obtížné při výrobě zajistit (ve vzorcích byly patrná místa s větším objemem matrice a naopak s menším objemem podílu vláken, které se shrnuly do jiné oblasti vzorku rámové konstrukce). Tento charakter nejvíce ilustruje obr. 3.5.8, kde je patrné, že po lineární závislosti v oblasti 0 – 5 mm nastává silový pokles, který se však obecně neprojevoval u všech měření. MKP modely byly porovnávány s experimenty pouze v lineární oblasti.

## 3.6 Závěr kapitoly

Tato kapitola přinesla ucelený výklad vývojového řešení s představenými možnostmi a prostředky optimalizace výroby rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny. V kapitole 3.1 – 3.2 byly uvedeny konstrukční principy a návrhy řešení pro výrobu rámu vyvíjeného z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny. Uceleně byla přiblížena problematika navíjení vlákenných pramenců na prostorovou geometrii nenosného jádra prostřednictvím prototypové technologie ovíjecího zařízení v mechanickém i automatizovaném provedení. Dále byl diskutován největší problém týkající se optimalizace za účelem odpovídající tuhosti a pevnosti rovné či křivé rámové konstrukce pro maximální využití vlákenné výztuže, což by umožnilo prototypové technologii vyrábět požadované ovinutí. Problematika optimalizace kompozitní rámové konstrukce je velmi komplexní a proto je nutné využít moderních metod matematického modelování, o čemž pojednává kap. 3.3. V rozsáhlé kapitole 3.3 byla popsána problematika vytvoření numerické simulace za účelem studie a optimalizace vinutí vzhledem k maximální tuhosti a pevnosti pro dané zatížení. Je popsána tvorba CAD modelů pro různé typy zaplnění  $V^f$  a  $n$  – počet vrstev  $\nu$ . Byly diskutovány jednotlivé směrové úhly vinutí vlákenných pramenců  $\alpha^\nu$ . Z výsledků bylo stanoveno, že obecně pro tahové, tlakové a ohybové namáhání je optimální, aby vlákenné pramence byly kladeny pod úhlem  $\alpha^\nu = 0^\circ$ , pro namáhání krutem  $\alpha^\nu = 45^\circ$ , případně kdyby rám byl zatížen vnitřním tlakem (např. využití jako zásobníku) bylo by vhodné pro dosažení maxima ho navíjet pod úhlem  $\alpha^\nu = 90^\circ$ . Pro kombinované namáhání by měl být kompozitní rám tvořen minimálně ze 3 vrstev s úhlovým kladením  $\alpha^{\nu=3} \approx 0^\circ; +45^\circ; -45^\circ$ . Z výsledků numerických simulací, které byly v dobré statistické shodě s experimenty bylo dále stanoveno, že s úhlovou orientací vlákenných pramenců zvyšujeme celkovou hmotnost kompozitní struktury  $m^c$ , neboť se zvyšuje objemové množství vláken  $V^f$ , ale paradoxně se nemusí zvyšovat maximální možná pevnost rámu. Z toho lze usuzovat, že požadovaný synergický účinek kompozitní struktury jednoznačně nenastává pouze zvýšením množstvím vlákenné výztuže, ale nastane pouze optimálním množstvím a kladením vlákenné výztuže. Z těchto ucelených výsledků a znalostí lze vycházet pro libovolné návrhy profilových kompozitních rámu a rámových konstrukcí vyztužených dlouhými vlákny.

## Kapitola 4

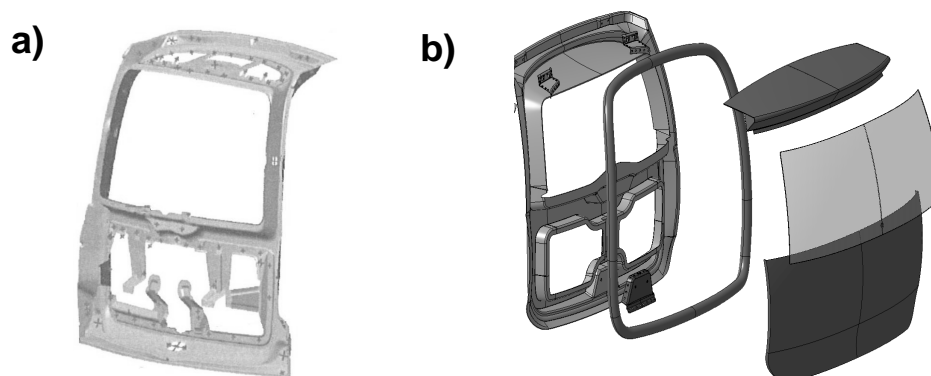
# PŘÍKLADOVÁ STUDIE APLIKACE VÝVOJOVÉHO ŘEŠENÍ RÁMU Z KOMPOZITNÍ STRUKTURY VYZTUŽENÉ DLOUHÝMI VLÁKNY

Kapitola je krátkým ukázkovým příkladem využití prototypové technologie v rámci spolupráce na vývojovém řešení kompozitní rámové konstrukce vyztužené dlouhými vlákny. V úvodu je charakterizována specifikace problému, kde je přiblížena problematika navíjení vlákenného pramence na prostorové jádro s proměnlivým průřezem. Řešení tohoto problému si vyžádalo modifikaci ovíjecí prototypové technologie konstrukčním řešením úpravy ovíjecí hlavy. Následně je diskutován vybraný problém dodržení požadovaného úhlu vinutí pro optimální pevnostní a elastické vlastnosti, který lze řešit pokročilou numerickou simulací. Na závěr jsou uvedeny některé výsledky numerické simulace, které vedly k znalostem pro optimalizaci vinutí vlákenného pramence na prostorovou geometrii jádra s proměnlivým průřezem.

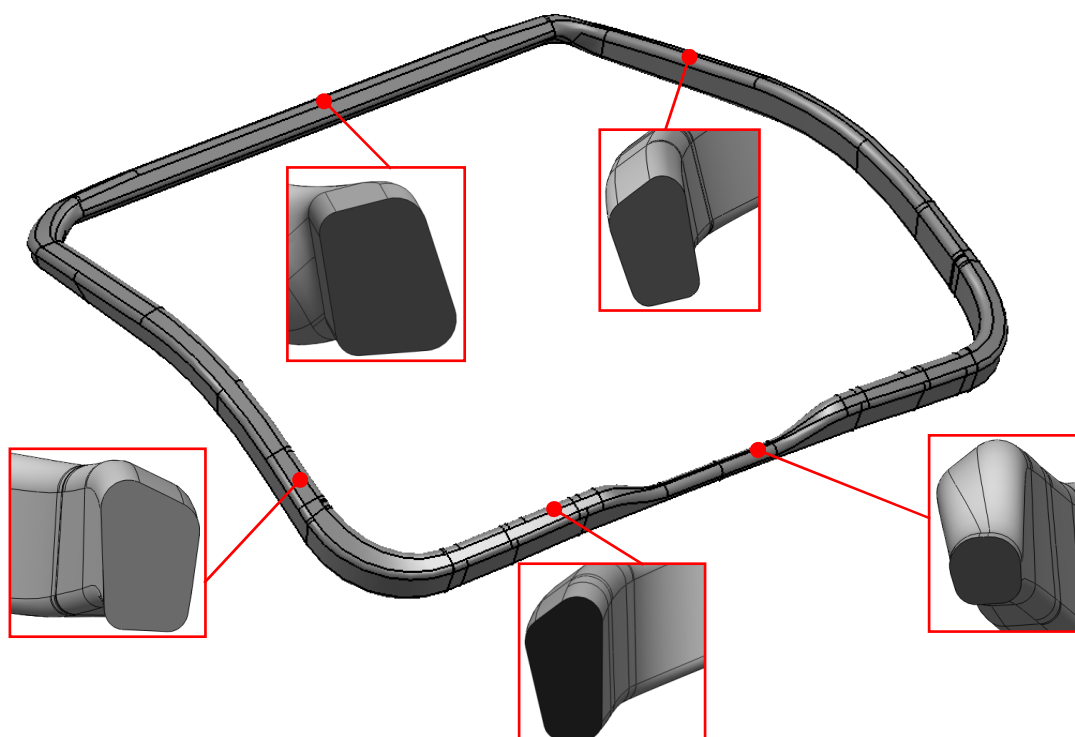
### 4.1 Specifikace problému

V předešlých kapitolách byla uceleně přiblížena problematika způsobu výroby rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny a vyvinuta prototypová technologie, prostřednictvím které lze přímo (případně konstrukční optimalizací) vyrobit prakticky jakékoliv geometrické tvary kompozitních rámu či jiné vybrané strojní části z kompozitních struktur (např. potrubní části, spojovací díly, části listových pružin, atd.). V této kapitole bude uvedena příkladová aplikace využití a optimalizace prototypové technologie plynoucí ze spolupráce na vývojovém řešení rámu do vybrané části automobilu resp. do zavazadlových dveří automobilu. Jednalo se o spolupráci na novém řešení rámové části konstrukce dveří, prostřednictvím nového řešení s využitím kompozitního rámu za účelem snížení hmotnosti při zachování specifické pevnosti a tuhosti. Automobilové dveře se vyrábí z výlisků s hlubokými tahy a složitými tvary, které jsou dále doplněny o vyztužující nosnou rámovou konstrukci, na které jsou uchyceny interiérové a exteriérové části, jak znázorňuje obr. 4.1.1. V současné době je nosný rám zpravidla vyroben z ocelové trubky z důvodu zajištění požadované pevnosti a tuhosti. V případě nového řešení v podobě rámu vyvinutého z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny, by se mohly splnit nejen pevnostní požadavky, ale zároveň by se docílilo snížení hmotnosti celých dveří. Komplexním problémem se však stává výsledný rám, který vzhledem ke konstrukci výlisku bude mít specifický prostorový tvar s proměnlivým průřezem. Jednotlivé průřezy jsou navrhnuté vzhledem k zachování odpovídající tuhosti/pevnosti v závislosti na předpokládaném působícím zatížení (obr. 4.1.2). V kap. 3 byl studován rám s tvarem kruhového průřezu, přičemž jestli se jednalo o rovnou geometrii, tak vnitřní statický účinek v libovolném bodě způsobený normálovou silou  $F_N > 0$  nebo  $F_N < 0$ , byl přenášen střednicí jádra při namáhání tahem nebo tlakem (viz obr. 3.3.9). Prostý tah a tlak byl doplněn zejména u křivého rámu ještě ohybem a krutem, kde platilo při malých přetvořeních, že se jednotlivé průřezy přibližně

deformují všechny stejně. Jestliže se však bude jednat o proměnný průřez podle obr. 4.1.2, kde se budou měnit hlavní centrální osy setrvačnosti a zároveň střednice bude zakřivená, v takovém případě se příčné průřezy nebudou deformovat všechny stejně ani pro malá přetvoření resp. bude docházet k nerovnoměrnému přetvoření.



**Obr. 4.1.1.** a) typ konstrukce plechového výlisku interiérové části zadních dveří, b) koncept provedení: exteriérová část – nosná rámová konstrukce – interiérová část.

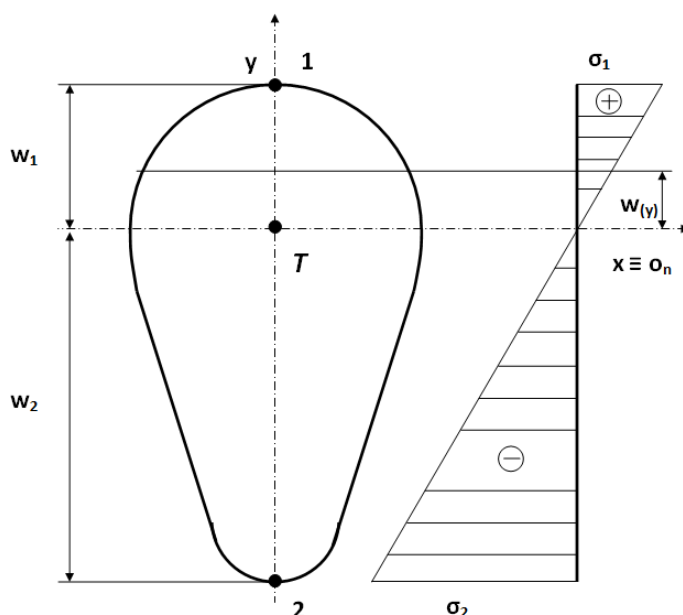


**Obr. 4.1.2.** Geometrie uzavřené rámové konstrukce s proměnnými průřezy.

V takovém rámu uloženém v konstrukci dveří lze předpokládat při obecném namáhání<sup>(32)</sup> zejména působení normálového ohybového napětí  $\sigma_o$  a smykového napětí  $\tau$ , přičemž

<sup>(32)</sup> Pozn. Předpokládáme, že uložený rám bude v konstrukci dveří namáhán staticky a síla se v čase nebude měnit. Ve skutečnosti při pohybu automobilu zřejmě v rámu budou vznikat občasné přetížení a dynamická namáhání (např. při rezonancích vzniklých rozkmitáním automobilu), které

tato napětí v jednotlivých příčných průřezích nebudou rovnoměrně rozloženy. Tento předpoklad lze dobře přiblížit na ilustračních příkladech prostého ohybového napětí a torzního napětí působícího v proměnlivém nekrhovém průřezu. Ohybový moment  $M_o$  vyvolá v průřezu ohybové napětí, jestliže budeme uvažovat, že je posouvající síla  $T = 0$ , což vychází z Bernoulli-Navierovy hypotézy, lze pro malé deformace předpokládat, že průřezy rámu zůstanou rovinné i po deformaci resp. dojde pouze k jejich pootočení. V průřezu vznikne neutrální vrstva, kde průsečnice neutrální vrstvy s rovinou průřezu je neutrální osa. Pro její polohu bude platit, že neutrální osa prochází těžištěm průřezu a zároveň je sdruženým průměrem ke stopě ohybového momentu v geometrii průřezu (obr. 4.1.3). Z této hypotézy lze následně vycházet pro obecný vztah (4.1.1), který je ekvivalentní (3.3.9).



**Obr. 4.1.3.** Průběh ohybového namáhání v nekrhovém průřezu.

$$\sigma_o(y) = \frac{M_o}{J_x} \cdot y. \quad (4.1.1)$$

Přičemž maximální tahové napětí v bodě 1 a maximální tlakové napětí v bodě 2 lze vyjádřit rozšířením vztahu (4.1.1) podle vztahu (4.1.2).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{M_o}{J_x} \cdot w_1 = \frac{M_o}{W_{ox1}} \\ \sigma_2 &= \frac{M_o}{J_x} \cdot w_2 = \frac{M_o}{W_{ox2}} \end{aligned} \right\}, \quad (4.1.2)$$

budou obecně proměnné v čase, závislé na okolnostech. V tom případě by napětí bylo funkcí času

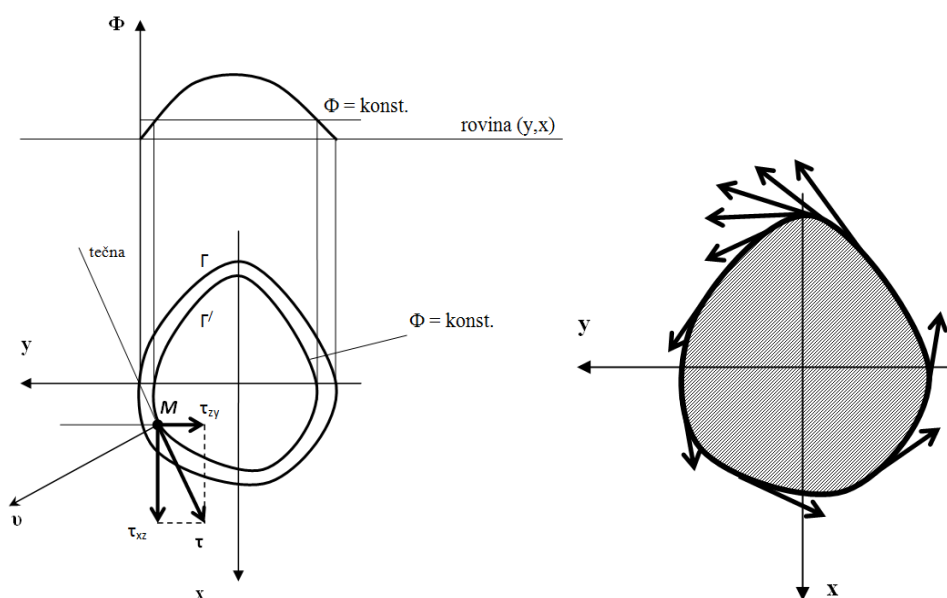
$$\text{tj. } \sigma(t + \Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \sigma(t + \Delta t) dt.$$

kde  $W_{ox1}, W_{ox2}$  jsou průřezové moduly v ohybu,  $J_x$  je kvadratický moment průřezu k neutrální ose  $o_n \equiv x$ ,  $w_1, w_2$  jsou vzdálenosti bodů 1,2 od neutrální osy  $o_n$ .

Pevnostní podmínka stanovující dovolené napětí  $\sigma_D$  bude vyjádřena vztahem (4.1.3).

$$|\sigma_{\max}| = \frac{M_o}{J_x} \cdot w_{\max} = \frac{M_o}{W_{ox \min}} \leq \sigma_D. \quad (4.1.3)$$

Pro stanovení torzního napětí lze vycházet z obecné membránové analogie (obr. 4.1.4 vlevo), pak lze definovat křivku  $\Gamma'$  v rovině  $yx$ , přičemž  $\Gamma'$  vyjadřuje zvolenou  $m$ -tou vrstevnici, na níž bude konstantní funkce napětí  $\Phi(y, x) = \text{konst.}$ . Na obrysu průřezu  $\Gamma$  bude tato funkce také konstantní, ale nulová. Následná podmínka  $\Gamma, \Gamma': \Phi = \text{konst.}$  je ekvivalentní tomu, že na obrysu mají výsledná smyková napětí  $\tau$  směr tečny k obrysové či libovolně zvolené  $m$ -té vrstevnicové křivce. Lze tedy říci, že výsledné smykové napětí v libovolně zvoleném bodu  $M$  příčného průřezu lze definovat podle vztahu (4.1.4) a bude mít směr tečny k vrstevnici, která tímto bodem prochází. Zároveň největší smykové napětí bude v oblasti s největším zhuštěním smykových čar, jak je schematicky uvedeno na obr. 4.1.4 vpravo.



**Obr. 4.1.4.** Membránová analogie smykových čar v rámové konstrukci s proměnlivým průřezem (vlevo), hustota smykových čar na nekuhovém průřezu (vpravo).

$$\tau = \tau_{xz} \cos(\nu, y) - \tau_{yz} \cos(\nu, z) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos(\nu, y) - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos(\nu, x) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}, \quad (4.1.4)$$

kde  $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$  vyjadřuje derivaci funkce napětí  $\Phi$  ve směru normály  $\bar{\nu}$ .



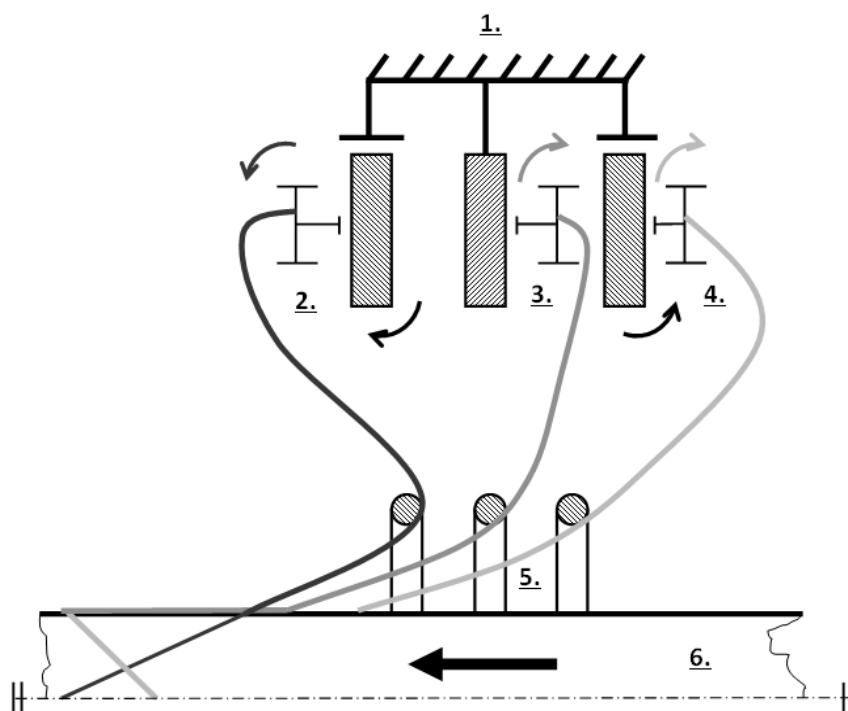
Protože je však trajektorie střednice prostorově zakřivená, mohou působit napětí i v rovinách kolmých na příčné průřezy. Pak celkovou napjatost nelze určit jen v příčných průřezích a je nutné ji řešit ve všech hlavních osách, pro což je nutné provést odpovídající numerické simulace. Tento problém dále nebudeme v uvedené příkladové studii diskutovat, neboť podobný problém byl dostatečně diskutován a vysvětlen u rámu z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny s konstantním průřezem jádra v kap. 3.3. Zde můžeme jen konstatovat, že pro dané namáhání budou platit stejná pravidla pro směrovou orientaci vinutí vlákenných pramenců jako u rámu s konstantním průřezem. Rozdíl bude nastávat, když budeme požadovat stejnou pevnost a tuhost ve všech průřezích, což následně povede na optimalizační úlohu stanovení optimálního počtu vrstev vzhledem k danému průřezu.

Dále budeme diskutovat vybraný výrobní problém, který je velmi složitý pro rámy s proměnlivým průřezem. Problémem proměnlivých průřezů vzhledem k výrobě rámu z kompozitní struktury se stává samotné navíjení vlákenného pramence na jádro. Jak bylo uvedeno dříve, obecně rám či rámová konstrukce musí splňovat podmínky pro různá namáhání, proto je nutné navrhovat takové provedení rámu, které tyto podmínky splní. V kap. 3.3 bylo uvedeno a diskutováno, že vzhledem k těmto podmínkám je důležité navinout vlákenné pramence na jádro minimálně ve 3 vrstvách tj. např.  $0^\circ$ ,  $-45^\circ$ ,  $+45^\circ$ . Problém však spočívá v tom, že se vlákenné pramence vlivem profilu mohou sklouznout či sesunout, přičemž u příčného vlákenného pramence bude docházet vzhledem k sklouznutí/sesunutí k nedodržení požadovaného úhlu navíjení nutného pro odpovídající mechanické vlastnosti. Tento problém je **velmi komplexní a složitý**, jehož řešení vede na úpravu resp. modifikaci prototypové technologie výroby navinutí vlákenných pramenců, která byla popsána v kap. 3.2.

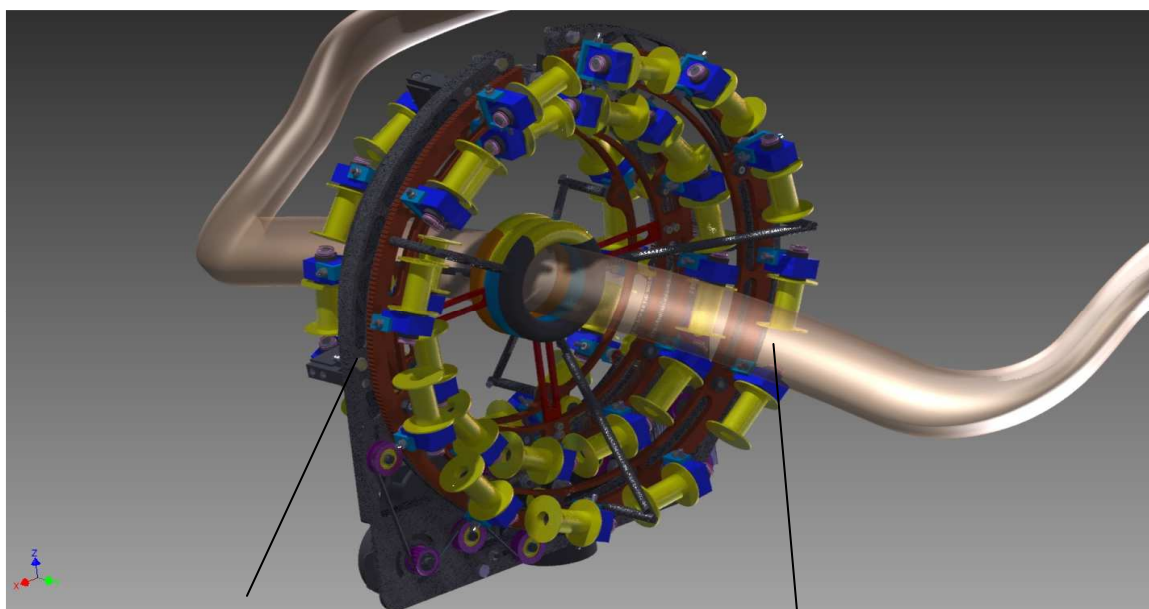
## 4.2 Modifikace konstrukčního řešení navíjení vláken na geometrii jádra s proměnlivým průřezem

Princip řešení může vycházet z toho, že podélný vlákenný pramenec bude v relativně stejném čase utahován (fixován) příčným vlákenným pramencem, čehož by se dalo konstrukčně docílit větším počtem navíjecích hlav nebo modifikací původního řešení navíjecí hlavy. Princip modifikace původního konstrukčního řešení je schematicky znázorněn na obr. 4.2.1, kde 1. představuje nosný rám navíjecí hlavy pro uložení jednotlivých prvků, 2. je pohybové vedení pro uložení cívek pro kladení příčných vlákenných pramenců např. pod úhlem  $+45^\circ$ , 3. je statické uložení cívek pro kladení podélných vlákenných pramenců (úhel kladení  $0^\circ$ ), 4. je pohybové vedení pro uložení cívek pro kladení příčných vlákenných pramenců např. pod úhlem  $-45^\circ$ . Dále vlákenné pramence procházejí naváděcími kroužky 5. a jsou navíjeny na geometrii jádra 6. Toto řešení umožňuje v principu docílit nejen rychlého fixování kladených vlákenných pramenců, ale také vede ke zvýšení efektivnosti produkce množství navinutých vlákenných pramenců oproti původnímu principu, který byl uveden v kap. 3.2. Konstrukční řešení samozřejmě musí být provedeno a uspořádáno tak, aby automatizace umožňovala natáčení modifikované navíjecí hlavy při průchodu geometrií jádra s proměnlivým průřezem. Výsledný konstrukční návrh modifikovaného provedení hlavy pro automatické nanášení vlákenné výztuže na geometrii jádra s proměnlivou geometrií je uveden na obr. 4.2.2. V konstrukčním řešení je patrné, že cívky s vlákny jsou na vedení (jak rotačním, tak nerotačním) uspořádány tak, aby si při pohybu vzájemně nepřekážely

a přitom byly v nejkratší geometrické vzdálenosti od sebe (vzhledem k prostorové a konstrukční zástavbě), jak je patrné z řezu (obr. 4.2.3). Princip tohoto provedení umožňuje teoreticky provést konstrukční řešení pro  $n$  – počtu vedení a  $n$  – počtu cívek.



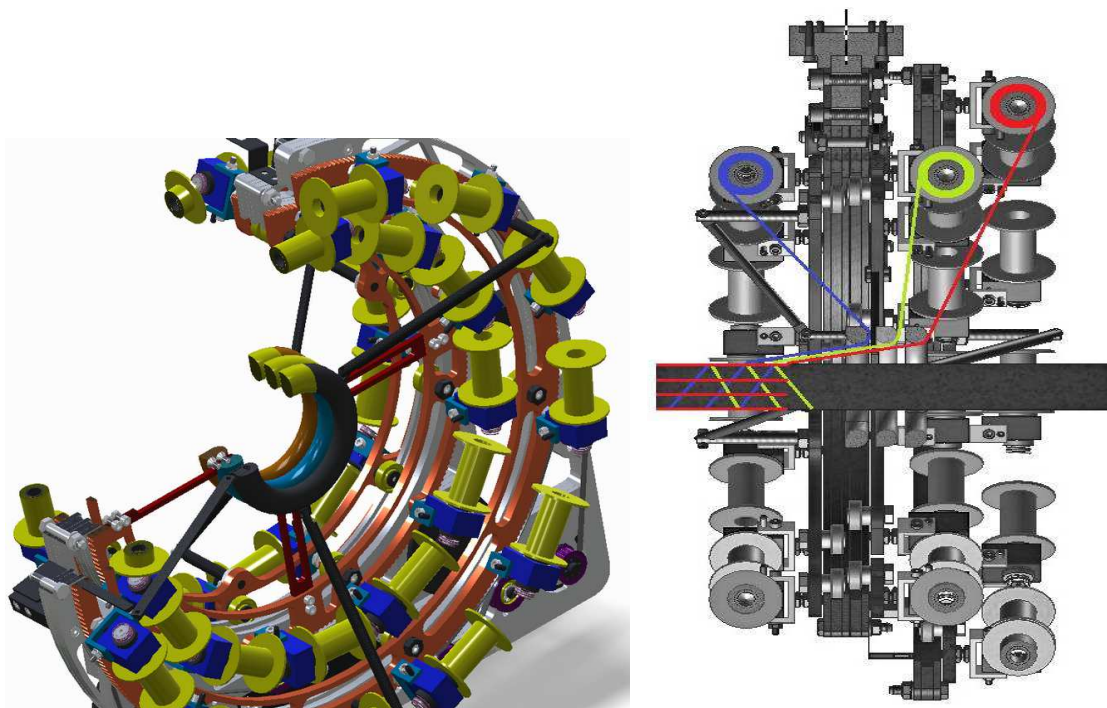
**Obr. 4.2.1.** Princip konstrukčního řešení modifikovaného provedení navíjecí hlavy.



**optimalizace navíjecího  
systému s třemi hlavami**

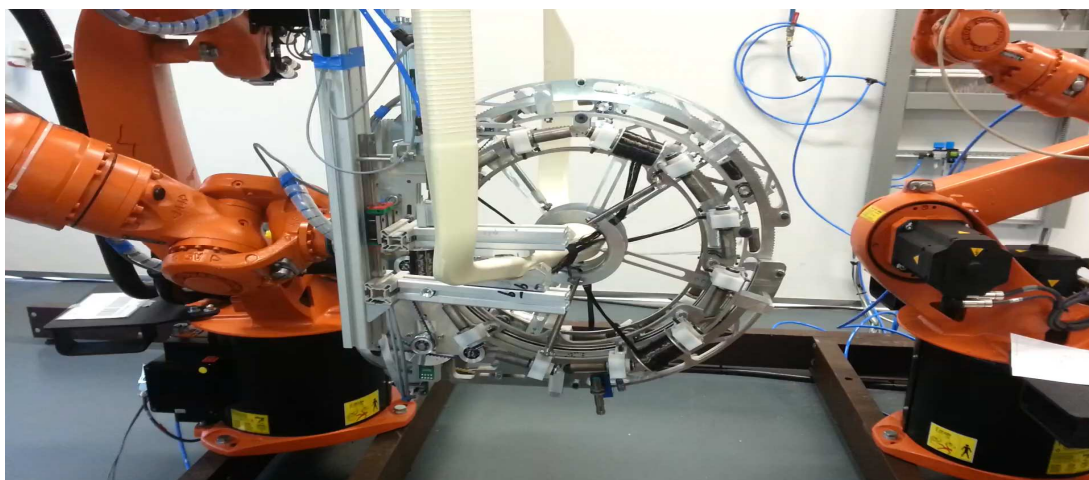
**jádru rámu**

**Obr. 4.2.2.** Modifikace navíjecí hlavy pro rámy s proměnlivým průřezem.



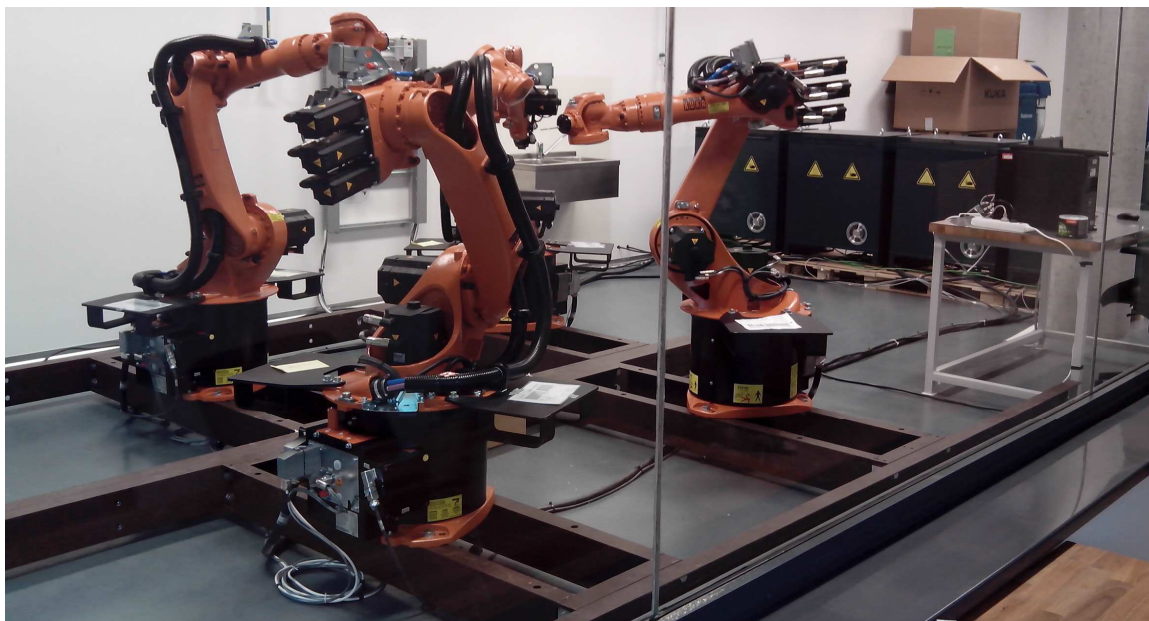
**Obr. 4.2.3.** Řez konstrukčním řešením modifikované navíjecí hlavy.

Konstrukční řešení modifikované navíjecí hlavy v provedení robotizované automatizace při reálném testování v prostorách laboratoře aplikované mechaniky je uvedeno na obr. 4.2.4. Z obr. 4.2.4 je patrné, že modifikovaná navíjecí hlava již není uložena na statický rám, jako v případě obr. 3.2.7. viz kap. 3.2, ale je uložena na pohybuující se rám. Uložení na pohybuující se rám bylo provedeno vzhledem k prostorové proměnlivosti geometrie jádra resp. pro dosažení rovnoměrnosti úhlového natáčení navíjecí hlavy ve směru pohybu navíjení vláknenných pramenců, jako je to v případě navíjení na jádro s konstantním průřezem. Pohybuující se rám resp. dynamické uložení modifikované navíjecí hlavy se provedlo uložení na rameno dalšího robota, jak je zřejmé z obr. 4.2.4. Celé robotizované pracoviště je uvedené na obr. 4.2.5 a reálné navíjení na obr. 4.2.6.



**Obr. 4.2.4.** Reálné testování modifikované ovíjecí hlavy při navíjení vláknenných pramenců na jádro s proměnlivým průřezem prostřednictvím robotizované automatizace.





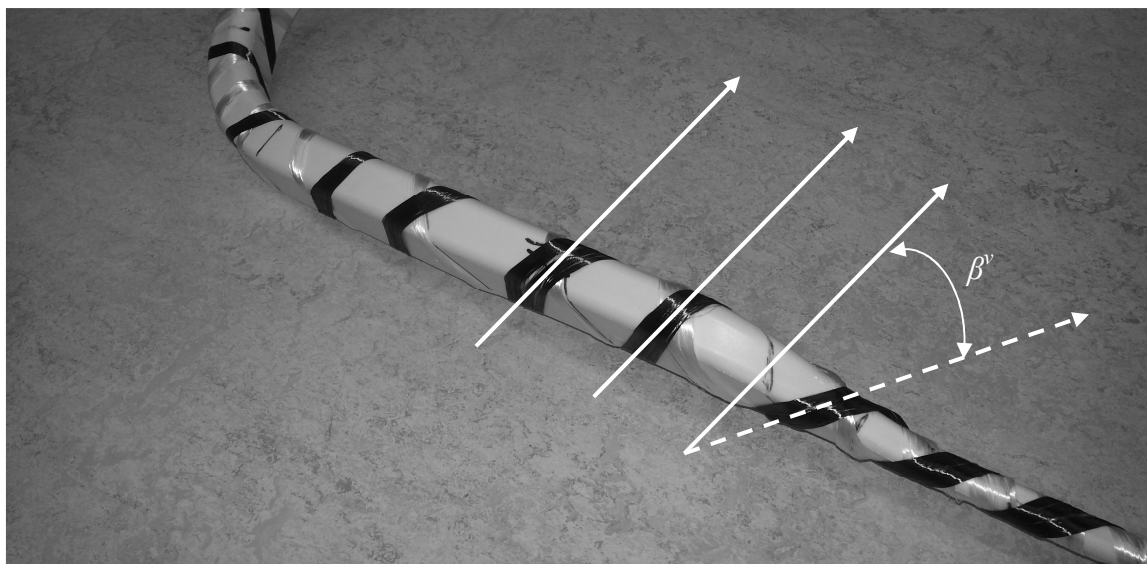
**Obr. 4.2.5.** Robotizované pracoviště využitelné pro automatizované ovíjení rámu s větším počtem robotů.



**Obr. 4.2.6.** Charakteristické navíjení vlákněných pramenců na prostorový rám s proměnlivým průřezem.

Je patrné z obr. 4.2.5 a 4.2.6, že spolupráce na vývojovém řešení kompozitního rámu s proměnlivým průřezem vyztuženého dlouhými vlákny vedla k **vytvoření unikátního robotizovaného pracoviště** v prostorách laboratoře aplikované mechaniky, které umožní automatizovanou výrobu ovinutí rámu vlákenou výztuží a také nabízí moderní využití pro vědecké i pedagogické aktivity. S využitím takového pracoviště a principu ovíjení, které je patentováno viz [41], lze navinout prakticky jakýkoliv tvar rámu, přičemž navíjení na daný průřez rámu bude ovlivněno pouze velikostí naváděcích kroužků. Přesto lze najít řady problémů, jež se vyskytují při navíjení jádra, které však tato práce nemůže a ani si neklade za cíl představit a vyřešit. Ukažme však ještě jeden problém týkající se vývojového řešení optimálního navinutí vláken na uváděný prostorový rám s proměnlivým průřezem, jež pomohly vyřešit opět numerické simulace.

Na obr. 4.2.7 je představen vybraný problém, který během navíjení rámové konstrukce s proměnlivým průřezem nastal, a bylo nutné ho vyřešit. Problém, jehož řešení bude přiblíženo, se vztahuje k dodržení požadovaného úhlového navinutí vláken (plné šipky), které v určitých místech (zejména v úsecích s rychlou změnou průřezu) způsobuje nekontrolované úhlové navinutí vláknenných pramenců (čárkovaná šipka), což je charakterizováno úhlem  $\beta^v$ . Tento problém je významný k požadavku na konečnou tuhost a pevnost rámové konstrukce z kompozitní struktury. Směr úhlového navinutí je ovlivněn zejména strukturními vlastnostmi jádra a vláken resp. vzájemným třením vlákno/jádro a rychlostí utažení vláknenného pramence. V ideálním případě by bylo proto vhodné řízeně kontrolovat úhel  $\alpha^v$ , aby nevznikal  $\beta^v$ . Tedy tak, aby se vláknenný pramenec nesklouznul vlivem proměnlivé geometrie a zároveň významně nedeformoval nenosné polyuretanové jádro (vliv utažení vláknenné výztuže může způsobovat deformaci PU jádra). Pro přiblížení děje, což by přispělo ke konstrukční optimalizaci utažení vláknenného pramence na jádro vzhledem k požadovanému úhlu navinutí  $\alpha^v$ , byla proto sestavena další pokročilá numerická simulace.

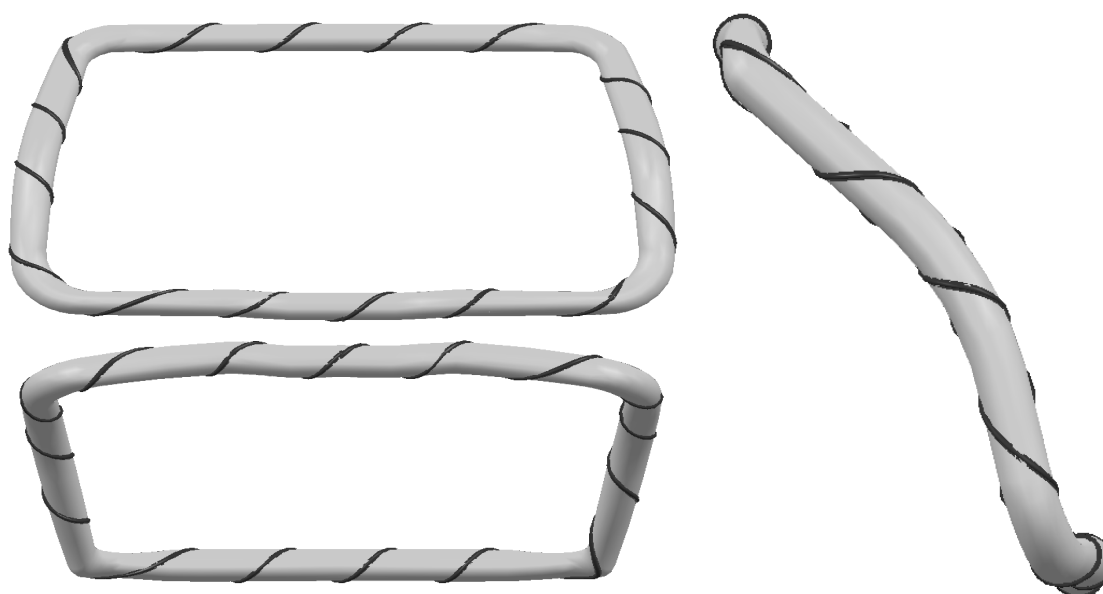


**Obr. 4.2.7.** Problém reálného navinutí vláknenných pramenců na jádro rámové konstrukce s proměnlivým průřezem: nedodržení požadovaného úhlu vinutí  $\alpha^v$ .

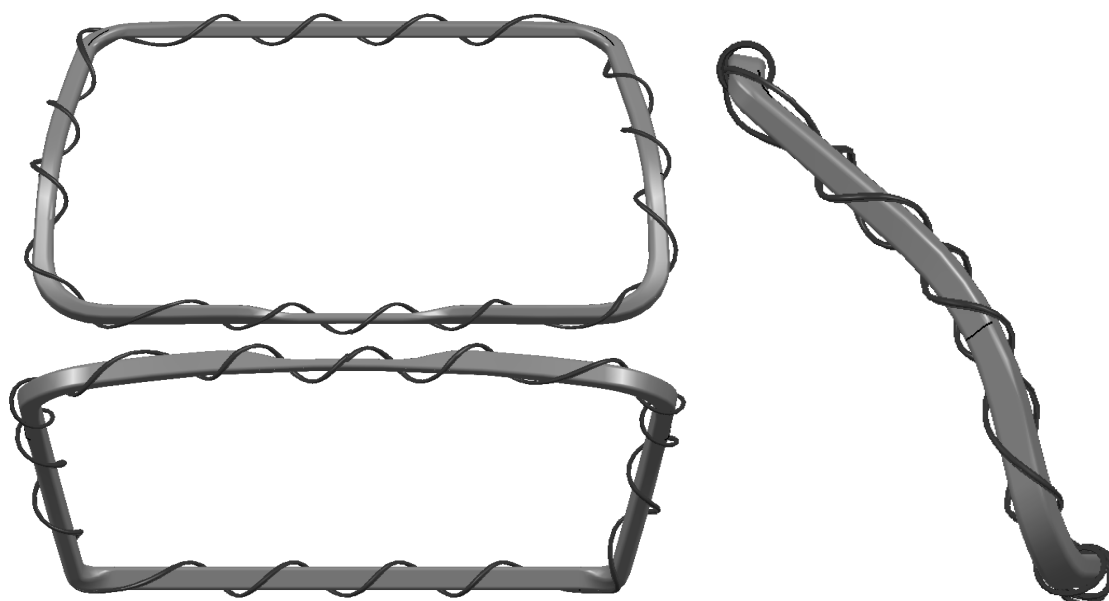
### 4.3 Numerické modelování pro podporu optimalizace navinutí dlouhého vláknenného pramence na jádro prostorového rámu s proměnlivým průřezem

Numerické modely umožňující přiblížit fyzikální problém navinutí vláknenného pramence, je vhodné vytvořit opět s pomocí geometrie vytvořené v CAD softwaru. V CAD softwaru můžeme prostřednictvím rovnic (3.3.1 – 3.3.9) vytvořit vláknenný pramenec kolem tvarového jádra a ten následně prostřednictvím modelových simulací testovat pro vliv tření vláknenného pramence s jádrem, rychlost utažení vláknenného pramence na jádro v závislosti na skluzu vlivem proměnlivé geometrie jádra, či pro optimalizaci konstrukční geometrie jádra. Aby bylo možné modelovat ovinutí a utažení vláknenného pramence na geometrii jádra, bylo nutné vytvořit ovin s definovaným

odsazením (ofsetem), což umožní studovat také vliv počátečního kontaktu vlákenného pramence s jádrem. Vzhledem k tomu byla vytvořena obálka kolem původního jádra a na ní se provedlo příčné ovinutí. Příklad obálky ovinuté příčným vláknem s úhlem ovinutí  $+45^\circ$  je uveden na obr. 4.3.1, což bylo aproximováno na 1 otáčku. Tím vznikl námi definovaný ofset CAD geometrie vlákenného pramence ovinutého kolem jádra prostorové rámové konstrukce s proměnlivým průřezem (obr. 4.3.2), který byl následně využit pro vytvoření numerické simulace. Samozřejmě jedná se o určité zjednodušení problému, neboť jak již bylo v kap. 3 přiblíženo při navíjení hraje významnou roli také průměr kroužku, přes který se vlákenný pramenec odvíjí na jádro rámu, reálný dotykový bod a výsledné tření.



**Obr. 4.3.1.** Vytvořená obálka kolem jádra prostorové rámové konstrukce s proměnlivým průřezem s příčně ovinutým vlákenným pramencem pod úhlem  $+45^\circ$ .



**Obr. 4.3.2.** Vytvořený ofset příčného vlákenného pramence ovinutého pod úhlem  $+45^\circ$  kolem jádra prostorové rámové konstrukce s proměnlivým průřezem.

V kap. 3 byly představeny numerické analýzy za účelem studie rozložení napjatosti deformovaného rámu ve stavu statické resp. kvazistatické rovnováhy. V případě numerické simulace utahení vlákenného pramence na prostorovou geometrii jádra, přechází úloha do řešení dynamického kontaktního problému. Je to dáno tím, že vlákenný pramenec se utahením v čase dynamicky mění a geometrie pramence se kontaktem s jádrem přetváří resp. vzniká velká deformace pramence, kde pole posuvů jednotlivých částí pramence se s časem výrazně mění. Jedná se o složitou modelovou simulaci, která musí umožňovat kinematiku přetvoření elementů vytvořené sítě konečných prvků přibližující kinematiku přetvoření reálného vlákenného pramence. To tedy znamená, že obecně kromě objemových a plošných sil, které působí na jednotlivé elementy vlákenného pramence je nutné uvažovat i příslušné setrvačné síly. Podle d'Alembertova principu jsou při pohybu mechanické soustavy síly explicitní v rovnováze se silami setrvačnými, které jsou definované jako záporně vzatý součin hmoty a zrychlení. Pro numerickou simulaci to lze vyjádřit v obecném tvaru podle rovnice (4.3.1).

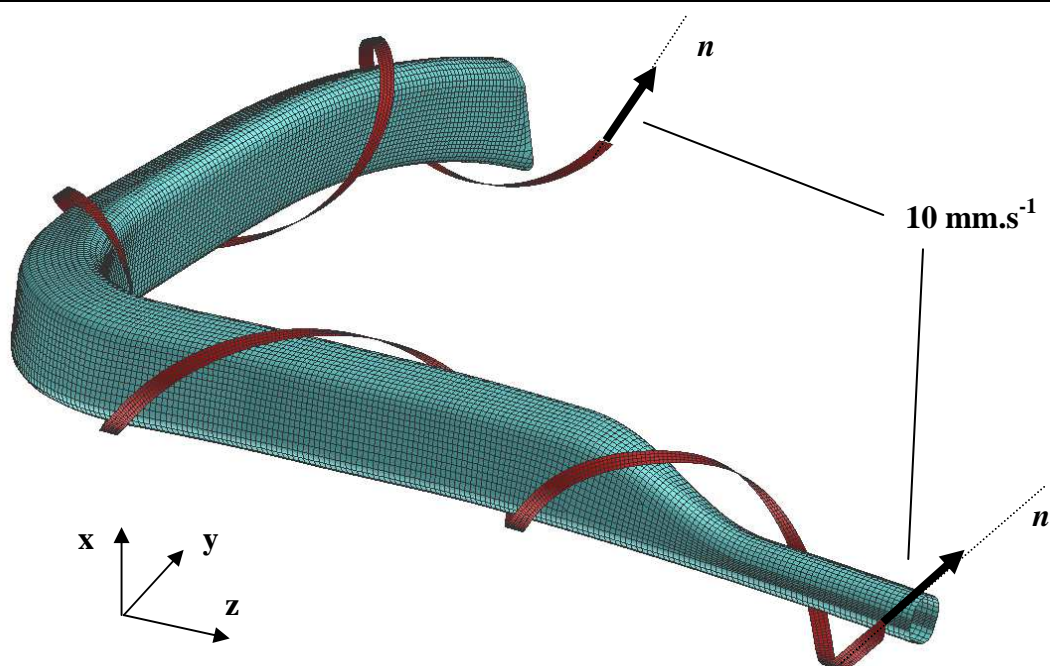
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \left( \wp_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \wp_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (4.3.1)$$

kde  $\wp_i$  vyjadřuje vektor objemových sil kromě sil setrvačných.

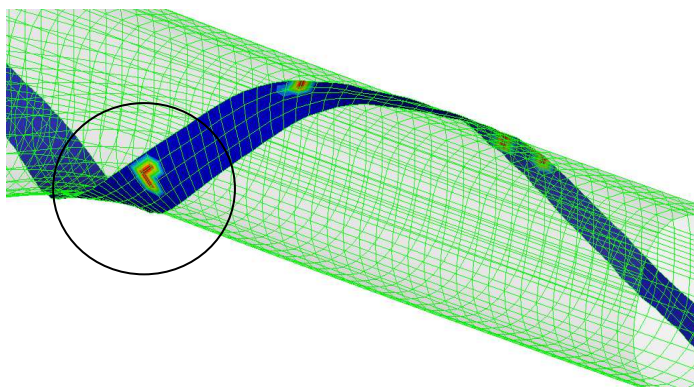
Pro numerický model vycházející z CAD geometrie (obr. 4.3.2) byly zvoleny tyto parametry: uhlíková vlákna a PU jádro podle materiálových vlastností uvedených v tab. 2.5.2, kap. 2. Sít konečných prvků byla vytvořena jako v předešlých uvedených modelech v programu Altair Hypermesh 12.1. Model byl rozdělen do jednotlivých částí, přičemž **nejproblematictějšími místem jsou oblasti s významnou změnou průřezu a křivosti jádra**, kde dochází k neřízenému sesunutí či neúplnému utahení vlákenného pramence (viz obr. 4.2.5). Tyto oblasti rámu, proto budou předmětem studie prostřednictvím numerických simulací. Protože se jedná o kontaktní úlohu je velmi důležité navrhnout velmi přesnou a pravidelnou síť konečných prvků. Kontaktní úlohy patří k nejsložitějším úlohám, které jsou ještě komplikovanější v oblasti velkých deformací, jak uvádí např. Clinckemaillie a kol. [55]. Vlákennému pramenci a jádru byla navržena pravidelná strukturovaná síť z SHELL elementů s konstantní velikostí elementu 2,5 mm. Okrajové a počáteční podmínky MKP modelu jsou uvedeny na obr. 4.3.3. Geometrie jádra byla definovaná nepohyblivá (pevně fixovaná), tj.  $U_i = R_i = 0$ , kde  $i = x, y, z$ , vlákenný pramenec měl definován pouze rychlost posuvu ve směru normály na krajních koncích o velikosti  $10 \text{ mm.s}^{-1}$ . Velikost kontaktu mezi vlákenným pramencem a jádrem byla definována hodnotou 0,05 mm. Tření mezi vlákenným pramencem a jádrem včetně dalších parametrů, které také významně ovlivňují celkovou náročnost výpočtu jsou uvedeny v tab. 4.3.1. Při výpočtu utahování vlákenného pramence na jádro je nejdůležitější přímá návaznost kontaktů s jednotlivými povrchy potřebnými pro vývoj prvního kontaktu, který v průběhu interakce pramenec – jádro má na počátku ovíjení kontaktní plochu dotyku  $a_s$  popsanou Hertzovým tlakem, jak je znázorněno na (obr. 4.3.4).

**Tab. 4.3.1.** Parametry charakterizující vlastnosti sítě konečných prvků jednotlivých částí v MKP modelu pro studii utahování vláknenných pramenců na jádro.

Část	Velikost elementu (mm)	Počet elementů (-)	Třecí koeficient mezi pramencem a jádrem (-)	Kontakt (mm)	Časový krok minimální (s)
Vláknenný pramenec	2,5	2754	0,1	0,05	$6,797 \cdot 10^{-5}$
Jádro		16066			$2,223 \cdot 10^{-7}$



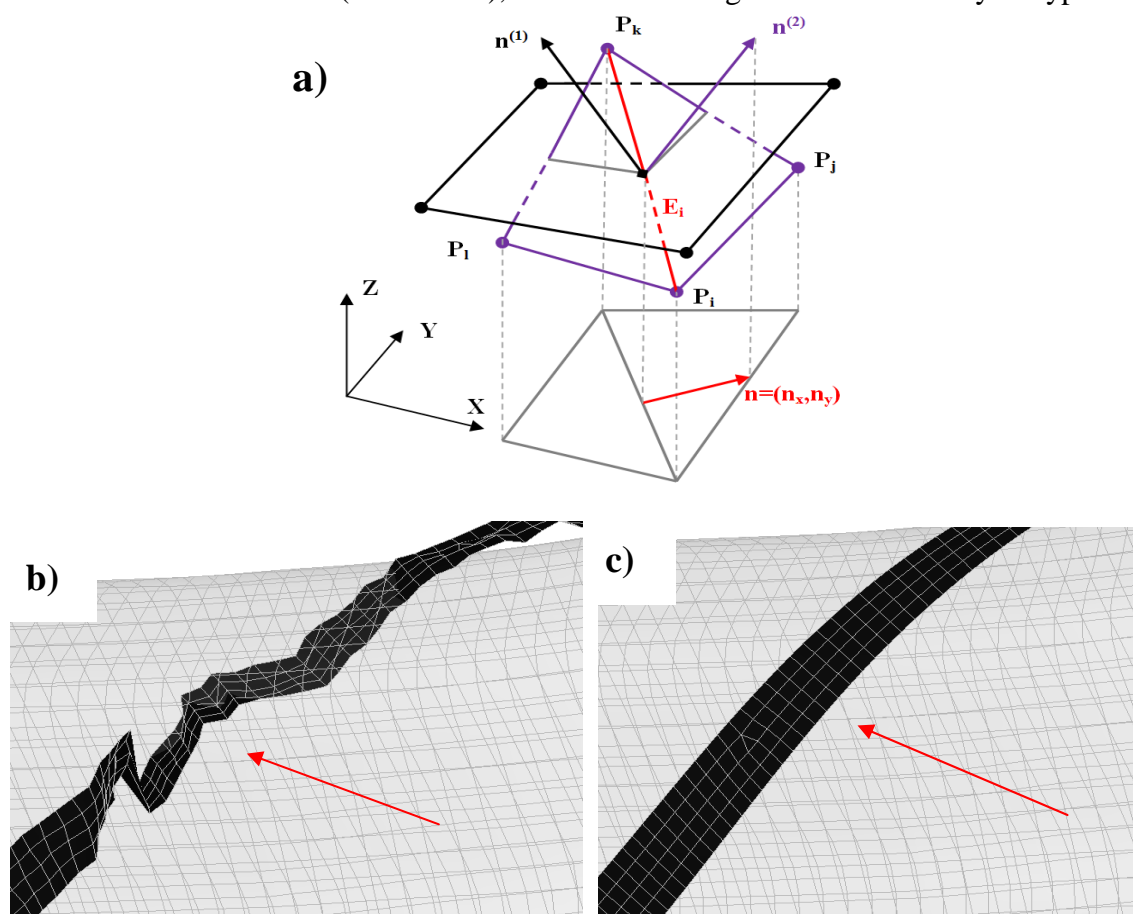
**Obr. 4.3.3.** Okrajové podmínky MKP modelu pro studii utahování vláknenných pramenců na prostorové jádro s proměnlivou geometrií průřezu.



**Obr. 4.3.4.** Kontaktní plocha  $a_s$  vzájemného dotyku na hranicích pramence s jádrem.



MKP model utažení vlákenného pramence na prostorovou geometrii nenosného jádra v důsledku složitých kontaktních podmínek klade vysoké nároky na výpočetní dobu. Je potřeba zajistit, aby změna kontaktních normálových sil  $\Delta F_N^E$  mezi dvěma a více kontaktními elementy nepřekonal kritickou hodnotu normálové tuhosti kontaktu  $C_n^{Ecrit}$ , kterou lze získat ze vztahu (4.3.2). Změny kontaktních normálových sil  $\Delta F_N^E$ , které vedou k nedostatečné stabilitě výpočtu a divergenci, mohou být způsobeny především nevhodnými okrajovými podmínkami na hranicích kontaktů. V modelu se to bude projevovat vzájemným pronikáním elementů (obr. 4.3.5a), kde uzlové body Master elementů (vlákenný pramenec) a Slave elementů (jádro) v kontaktu překročí kritickou hodnotu tuhosti kontaktu (obr. 4.3.5b), což vede k divergenci a následné chybě výpočtu.



**Obr. 4.3.5.** a) schéma pronikání elementů při překročení kritické hodnoty kontaktní normálové tuhosti, b) vzájemné pronikání Master elementů a Slave elementů vlákenného pramence v kontaktu s jádrem, c) odpovídající kontakt mezi vlákenným pramencem a jádrem.

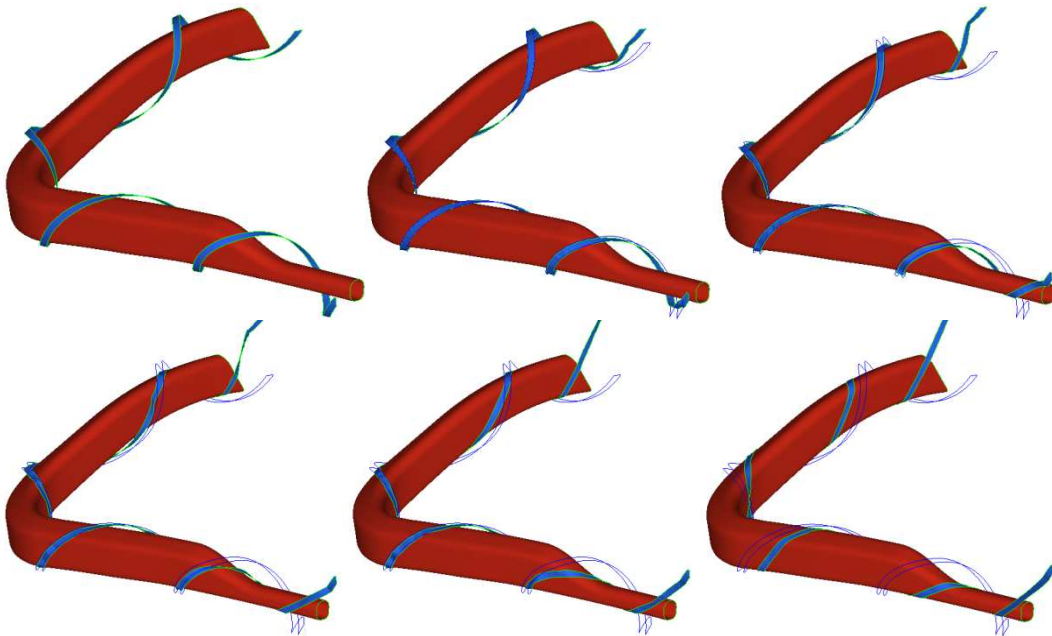
Tyto kontaktní problémy byly diskutovány autorem také při řešení jiných nekonvenčních materiálových struktur za účelem komplexních studií pro optimalizace vybraných typů konstrukčních zařízení, v [13] a [14]. Základní problém spočívá především v pojetí okrajových Dirichletových podmínek popisujících vnější hranici (typ zadané okrajové podmínky) a vnitřní hranice (mezi oblastmi elementů v kontaktu). Proto pro zachování stability výpočtu je nutné definovat odpovídající parametry kontaktu (obr. 4.3.5c), které umožní po co nejdelší dobu dostatečnou stacionaritu výpočtu. To je možné zajistit

vynucenými omezujícími podmínkami pro optimalizaci minima prostřednictvím Kuhn-Tuckerovi podmínky, která je dána rovnicí (4.3.3), jak uvádí Birbil, Frenk a Still [56]. Diskrétní formulace podmínek na kontaktní hranici musí být realizována tak, že kontakt je vytvářen v párech protilehlých uzlů sítě konečných prvků, přičemž každý z párů náleží jinému z těles v kontaktu. Každému kontaktnímu páru je předepsán normálový vektor  $n^{(i)}$  a  $n^{(j)}$ . Platí-li podmínka  $n^{(i)} + n^{(j)} = 0$ , je zaručeno nepronikání elementů. Takto definované podmínky vedou k řešení fyzikálního problému, ve kterém zabráníme, aby se deformovaná tělesa neprostupovala. Ukázka časového průběhu numerické simulace utažení vláknenného pramence na prostorovou geometrii jádra s proměnlivým průřezem je uvedena na obr. 4.3.6. Příklady výsledků v kritických místech jsou uvedeny na obr. 4.3.7. Rozložení vektorů deformace vláknenného pramence po utažení na jádro je uvedeno na obr. 4.3.8.

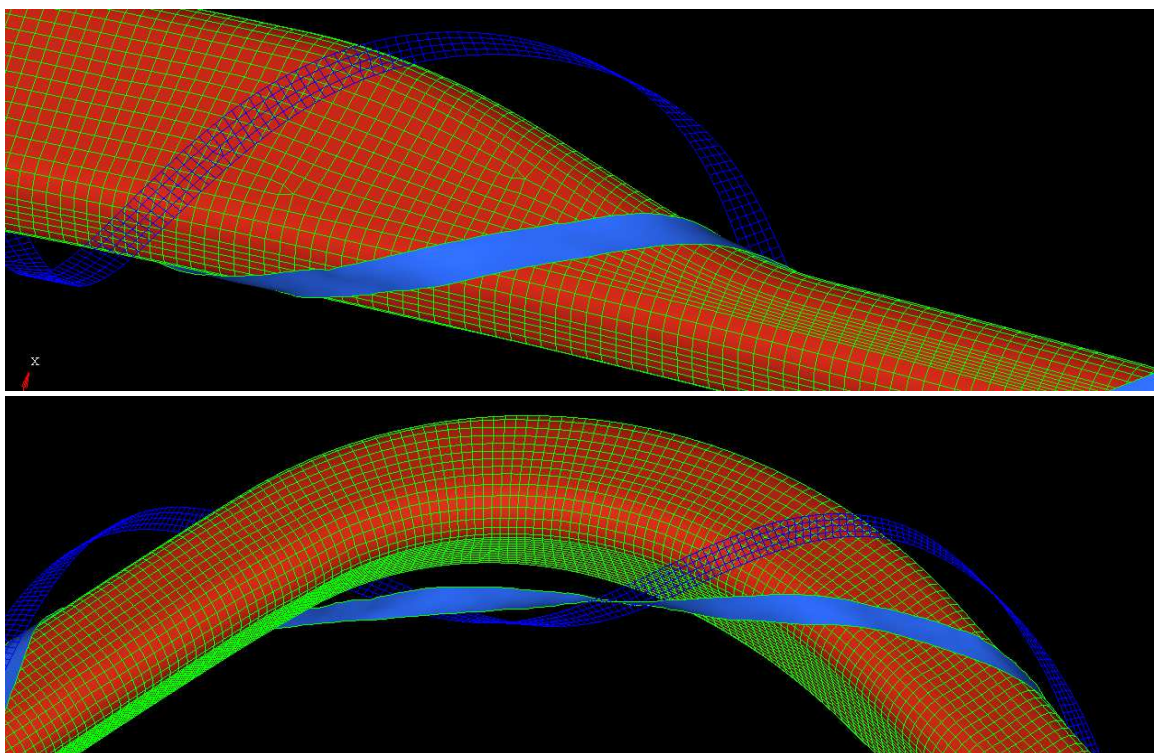
$$\Delta F_N^E = C_n^{Ecrit} \cdot \Delta n^E, \quad (4.3.2)$$

$$\nabla F_n(\delta, t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [g_i \cdot \nabla \Lambda_i(\delta, t) + h_j \cdot \nabla \Gamma_j(\delta, t)] = 0, \quad (4.3.3)$$

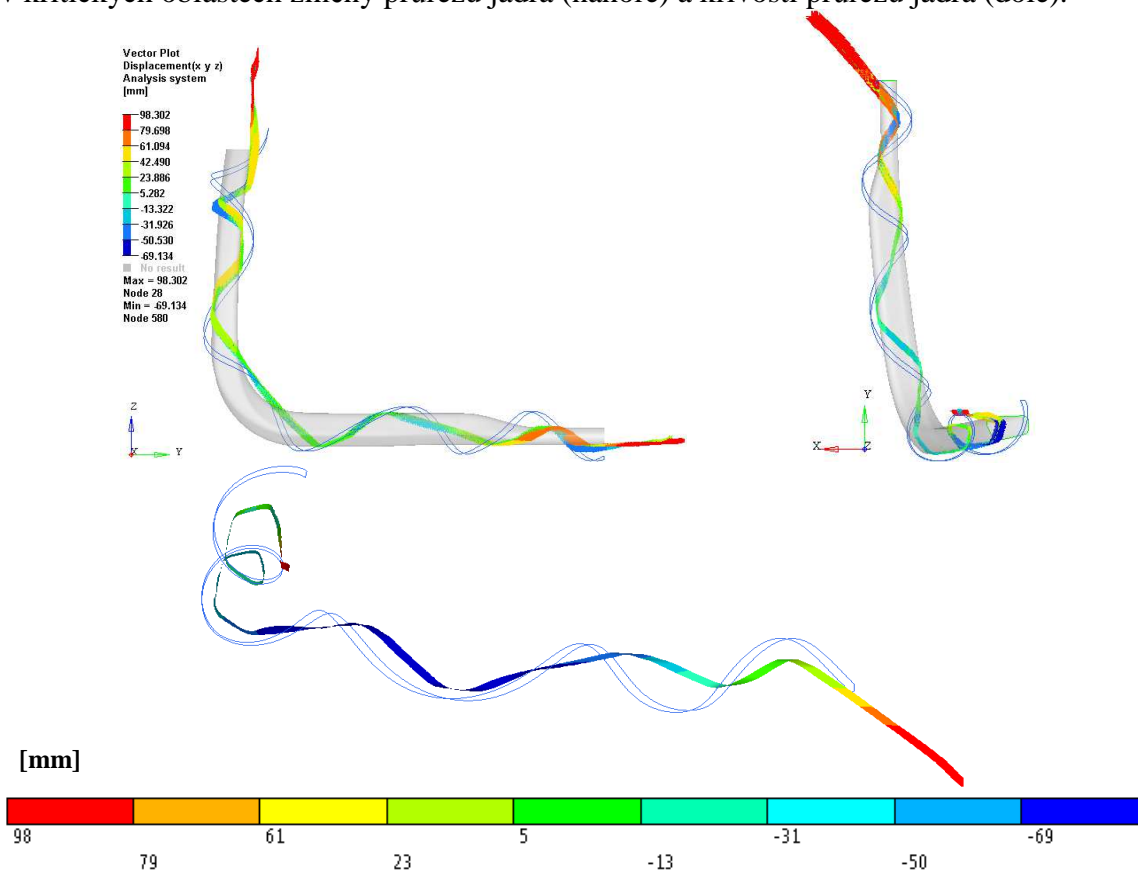
kde  $\Delta F_N^E$  je změna kontaktních normálových sil,  $C_n^{Ecrit}$  kritická hodnota normálové tuhosti kontaktu,  $\Delta n^E$  změna fiktivní velikosti překrytí elementů přenášející se přes uzlové body,  $\delta$  je stlačování vláknenného pramence při navíjení kolem jádra,  $\Lambda_i \leq 0$  pro  $i=1,2,...,m$  jsou omezující podmínky pro nerovnosti,  $\Gamma_j = 0$  pro  $j=1,2,...,m$  jsou omezující podmínky pro rovnosti,  $g_i, h_j$  pro  $i, j=1,2,...,m$  jsou konstanty, které splňují podmínky regularity,  $\nabla$  je Laplaceův symbol vyjadřující gradient funkce.



**Obr. 4.3.6.** Časový průběh numerické simulace utažení vláknenného pramence na geometrii jádra s proměnlivým průřezem.

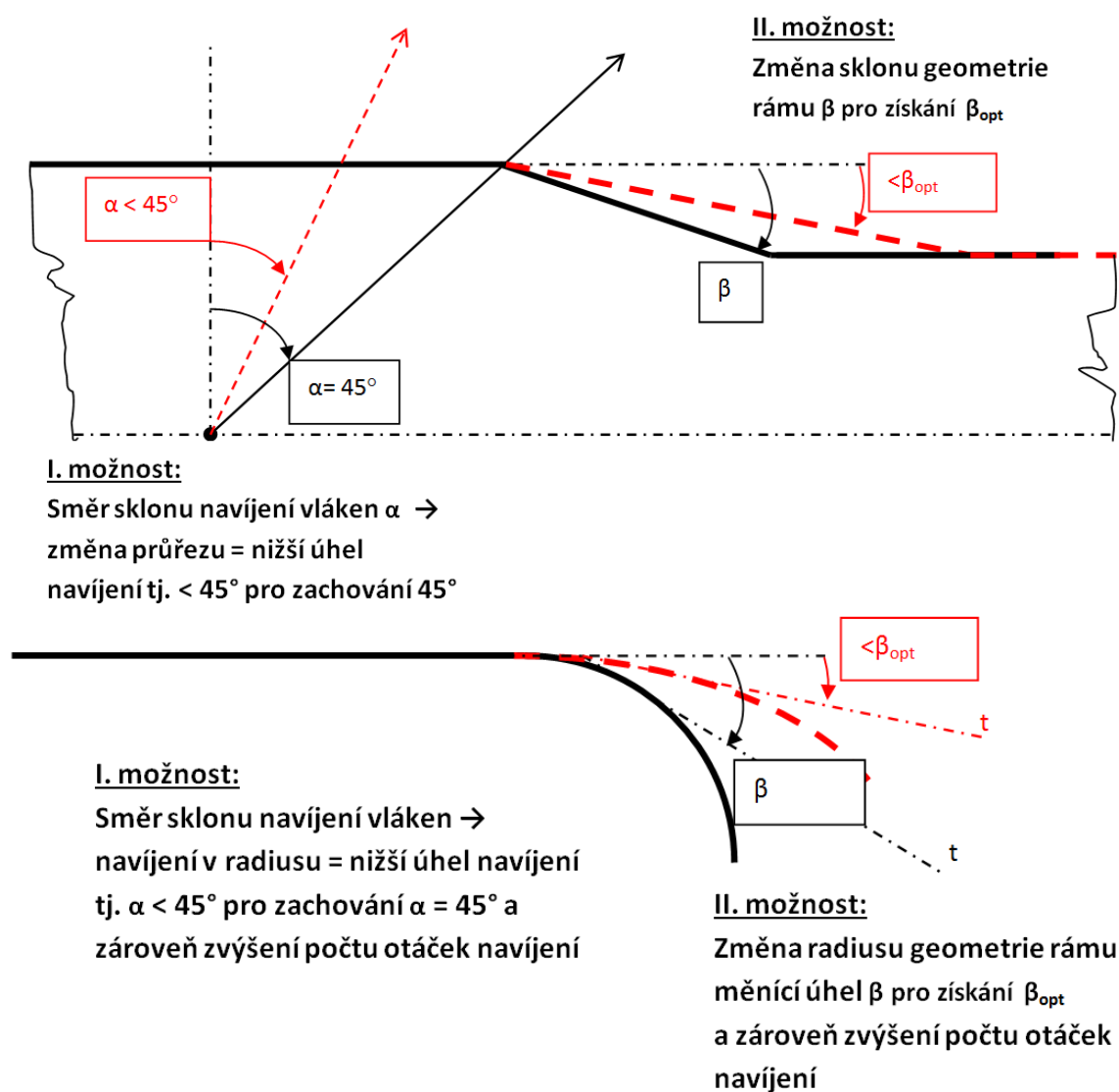


**Obr. 4.3.7.** Detaily výsledků numerické simulace utahnutí vlákenného pramence v kritických oblastech změny průřezu jádra (nahore) a křivosti průřezu jádra (dole).



**Obr. 4.3.8.** Rozložení vektorů deformace vlákenného pramence po utahnutí na jádro.

Analýza výsledků numerického modelování vedla k stanovení deformace a utažení vláknenného pramence (obr. 4.3.8), což pomohlo zpřesnit informace pro úhlové natočení ovíjecí hlavy pro optimální dodržení požadovaného sklonu, jak je schematicky uvedeno na obr. 4.3.9. Z charakteru přetvoření plyne, že se prakticky jedná o 2 různé možnosti: I. buď se konstrukčně upraví geometrie jádra výsledného rámu (např. sklon, průřezy, radiusy), nebo za II. bude nutné úhlově natáčet hlavu v kritických místech změny průřezu. V kritických místech velkých radiusů bude potřeba provést zvýšení počtu otáček se sníženou roztečnou pro okamžité utažení. Tato příkladová studie numerického modelování ukázala nástroj a možnosti pro optimalizaci vinutí vláknenných pramenců na prostorové jádro s libovolným průřezem. Výsledky také přispěly k uceleným znalostem pro optimální (požadované) navíjení vláknenných pramenců při spolupráci na vývoji kompozitní rámové konstrukce s proměnlivým průřezem. Výsledky reálného navíjení jednoho vláknenného pramence a kompletního prostorového rámu s proměnlivým průřezem jsou uvedené na obr. 4.3.10. Výsledek vyrobeného rámu s proměnlivým průřezem, který je vyztužen dlouhými vlákny je uveden na obr. 4.3.11.



**Obr. 4.3.9.** Schematické možnosti optimálního navíjení vláknenného pramence na prostorové jádro s proměnlivým průřezem (nahore), s kritickým radiusem (dole).





**Obr. 4.3.10.** Optimální navinutí vlákenného pramence na profilové jádro s proměnlivým průřezem (nahore), kompletní navinutí (dole).



**Obr. 4.3.11.** Výsledek vyrobeného kompozitní rámu s proměnlivým průřezem.

## 4.4 Závěr kapitoly

Tato kapitola je krátkým příkladem spolupráce akademické a průmyslové sféry na konstrukčním vývojovém řešení kompozitní rámové konstrukce s proměnlivým průřezem vyztužené dlouhými vlákny. Vzhledem ke komplexnímu charakteru řešení bylo nutné provést modifikaci prototypové technologie a pro optimalizace provést numerické simulace. Výsledkem byly znalosti vedoucí k vyvinutí nové kompozitní rámové konstrukce, která svojí nízkou hmotností a naopak vysokou specifickou pevností se stává příkladem nahrazení konvenční rámové konstrukce využitelné i v průmyslovém měřítku.

## Kapitola 5

### ZÁVĚR

Habilitační práce si kladla za splnění hlavního cíle uceleně přiblížit systematický výklad provedených výzkumů a studií s využitím pokročilého numerického modelování, které přispěly **k návrhu a optimalizaci vývojového řešení prostorového rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny.**

Tento komplexní multidisciplinární problém si vyžádal provedení řady analýz, teoretických studií, modelových simulací a měření, které vedly ke splnění hlavního cíle habilitační práce. Práce vzhledem k rozsahu řešení nemohla zahrnout celou řešenou problematiku spojenou s vyčerpávajícím přehledem všech experimentů a numerických simulací a ani si to nekladla za cíl. Cílem bylo v patřičné míře uvést dílčí cíle, které uceleně vedly ke splnění hlavního cíle habilitační práce.

Pro splnění hlavního cíle habilitační práce **byly vyřešeny následující dílčí cíle:**

- Analýza mechanických vlastností vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny
  - Tento dílčí cíl byl patřičně vyřešen v kapitole 2, kde byly uceleně přiblíženy vytvořené studie a analýzy vzorků kompozitních materiálů vyztužených dlouhými vlákny, které vedly k stanovení a porovnání mechanických vlastností vzorků kompozitů vyztužených skleněnými a uhlíkovými vlákny. V požadované míře byla diskutována problematika kompozitů vyztužených dlouhými vlákny s uvedením faktorů, které ovlivňují výsledné mechanické a synergické vlastnosti kompozitů (viz kapitoly 2.1 – 2.3). Následně byly uvedeny analytické modely, jako např. Voigtův, Reussův, Chamisův model a další, pro matematicko-fyzikální popisy a hypotézy vedoucí k přibližnému popisu mechanického chování příčně izotropních kompozitů (kap. 2.4). V rozsáhlejší kap. 2.5 byly vytvořeny numerické modely vzorku kompozitní vlákenné struktury pro stanovení mechanických vlastností, rozložení deformace a napětí, jak prostřednictvím popisu obecného kontinua, tak komplexnějšího numerického modelu se strukturním uspořádáním umožňující přiblížit i vzájemnou interakci vlákna a matrice. Výsledky numerických modelů vykazovaly statisticky významnou shodu v porovnání s analytickými modely a také měřeními a stanovily mj. hodnoty elastických konstant  $E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{23}$ , pro jednotlivá objemová zaplnění  $V^f$  (kap. 2.5.3).
  - Vyřešením prvního dílčího cíle byla sestavena nejen analýza mechanických vlastností vzorků z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny, ale výsledky zejména přispěly k získání ucelené syntézy informací a znalostí, které bylo důležité určit jako vstupní parametry pro

konstrukční řešení a optimalizaci celých rámců vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny.

- Konstrukce a optimalizace rámců vyvíjených z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny
  - Konstrukční řešení a optimalizace rámců případně rámových konstrukcí vyvíjených z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny byly uceleně přiblíženy v kap. 3 a doplněny v kap. 4. Byla představena problematika vývojového řešení otevřeného i uzavřeného prostorového rámu z kompozitu a uvedeny způsoby konstrukčního a technologického řešení pro navinutí vyztužujících vláken na jádro rámu (kap. 3.1 a 3.2). Řešením tohoto dílčího cíle vzniklo pokročilé robotizované pracoviště s prototypovou technologií navíjení vláken v laboratoři aplikované mechaniky Technické univerzity v Liberci a patentování výrobní technologie pro výrobu rámové konstrukce z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny, včetně prodeje průmyslové licence. Rozšíření vybavení laboratoře představuje významný nástroj pro vývoj konstrukčních rámců a strojních prvků jako jsou např. nosníky, stabilizátory, kompozitní pružiny, tlakové nádoby vyvíjené z kompozitů. Pro stanovení optimálních mechanických vlastností rámců z kompozitních struktur vyztužených dlouhými vlákny byly vytvořeny pokročilé numerické simulace (kap. 3.3), které definovaly optimální směry vinutí vláken resp. vlákenných pramenců pro dané zatížení. Budou-li vlákenné pramence ovinuté na jádro rámu ve dvou vrstvách ve vzájemně kolmých směrech  $0^\circ$  a  $90^\circ$  vzhledem k střednici, přispívají příčná vlákna k podélné pevnosti při tahu jen minimálně, ale jejich příspěvek do výsledné pevnosti se začne zvyšovat s orientací úhlu směrem k  $0^\circ$ . Pro zatížení vnitřním tlakem u nádob či zásobníků to bude platit naopak, tedy se zvyšováním směrové orientace se bude zvyšovat tuhost. Pro namáhání rámu krutem bude optimální vinutí vlákenných pramenců pod úhlem  $45^\circ$ .
  - Obecně platí, že objemový podíl vlákenné výztuže  $V^f$  v kompozitním rámu zvyšuje výrazně tuhost a odpor proti deformaci a tedy hodnota napětí při tahovém zatížení poroste. Tím však také poroste celková hmotnost rámu, neboť vlákna mají vyšší hustotu než matrice. Nelze však jednoznačně konstatovat, že nutně zvyšováním objemového množství vláken  $V^f$  se bude maximalizovat pevnost, neboť požadovaný synergický účinek kompozitní struktury nemusí nastat zvýšeným množstvím vlákenné výztuže, ale nastane pouze optimálním množstvím a směrovým uspořádáním vlákenné výztuže.
  - Bylo také vysvětleno, že pro nahodilé zatížení (pseudonáhodné zatížení, kombinované zatížení, atd.) a vlivem ortotropních vlastností jednotlivých vrstev kompozitního rámu, je vhodné navrhovat kompozitní rámy minimálně s třemi vrstvami  $\nu=3$  v kombinaci kladených vrstev vlákenných pramenců s orientací  $\alpha^{\nu=3} = 0^\circ; +45^\circ; -45^\circ$ . Zvyšováním

počtu vrstev budeme nejen vlivem synergických vlastností zvyšovat pevnost a tuhost.

- Vyřešením druhého dílčího cíle se získaly ucelené výsledky a znalosti vedoucí k vyvinutí profilového rámu z kompozitní struktury vyztužených dlouhými vlákny.
- Příkladová studie aplikace vývojového řešení rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny
  - Příkladová studie akademické a průmyslové spolupráce je uvedena v kap. 4. Jedná se o krátký příklad využití prototypové technologie navíjení v rámci spolupráce na vývojovém řešení prostorového kompozitního rámu s proměnlivým průřezem. Řešení tohoto problému si vyžádalo modifikaci ovíjecí prototypové technologie konstrukčním řešením úpravy ovíjecí hlavy (kap. 4.2) pro automatické navíjení 3 vrstev vlákenných pramenců. V kap. 4.3 byl také představen dílčí problém, k jehož vyřešení přispěla vytvořená numerická simulace. Je důležité uvést, přesto že se jednalo o ideální případ modelování utažení jednoho vlákenného pramence s idealizovanými podmínkami (pramenec byl kontinuum, tj. netřepil se, neměl nerovnoměrné rozložení vláken) a předpoklady (ideální utahování), tak numerická simulace metodou konečných prvků umožnila vizualizovat navíjení ještě před reálným provedením (studie vlivu tření a utažení) a tím přispěla k optimalizaci.
  - Vyřešení třetího dílčího cíle vedlo k příkladové spolupráci s průmyslovým partnerem na vyvinutí profilového rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny, který lze aplikovat v dopravním prostředku.

Vyřešení dílčích cílů habilitační práce vedlo k vytvoření ucelené syntézy výsledků, které přispěly k podpoře vývojového řešení rámu z kompozitní struktury vyztužené dlouhými vlákny. Dále výsledky přispěly k vytvoření řady prototypů a patentových přihlášek.

Výsledky řešení lze také využít k modernizaci výuky v předmětech „*Konstrukční cvičení, Části a mechanismy strojů I, II, a CAD I, II*“ a předmětů v oborovém studiu „*Projekt I, II, Experimentální metody a Modelování textilních útvarů*“.

V neposlední řadě výsledky práce vedly k rozšíření a modernizaci laboratoře aplikované mechaniky, což přispěje k zlepšení experimentálních podmínek pro základní i aplikovaný výzkum, včetně rozšířené podpory pro studenty při zpracování diplomových, disertačních a dalších kvalifikačních prací nejen v oboru konstrukce strojů a zařízení.



## LITERATURA

- [1] Evropská směrnice 2000/53/ES:  
<http://eur-ex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=DD:15:05:32000L0053:CS:PDF>
- [2] FP7, RP7 - vývoj zaměřený na energeticky nenáročné materiály:  
[http://ec.europa.eu/research/fp7/pdf/fp7-brochure\\_cs.pdf](http://ec.europa.eu/research/fp7/pdf/fp7-brochure_cs.pdf)
- [3] Agarwal, B. D., Broutman, L. J., Chandrashekhara K. (2006). *Analysis and Performance of Fiber Composites*, 3rd Edition, p. 576. ISBN: 978-0-471-26891-8.
- [4] Guedes, R. M. (2010). *Creep and Fatigue in Polymer Matrix Composites*, Woodhead Publishing, p. 600, ISBN: 978-1-84569-656-6.
- [5] Gay, D., Gambelin, J. (1999). *Dimensionnement des Structures, une Introduction*, Hermes Science Publishing Ltd., London, p. 680, EAN13 : 9782746200494.
- [6] Reifsnider, K. L. (1991). *Fatigue of Composite Materials*, Elsevier, ISBN: 978-0-444-70507-5.
- [7] Bareš, A. (1988). *Kompozitní materiály*, SNTL, Praha, s. 356.
- [8] Gay, D., Hoa, S.V. (2007). *Composite materials – design and applications*, CRC press, Taylor & Francis Group London, p. 550, ISBN: 978-1-4200-4519-2.
- [9] Novák, O., Petrů, M. (2014). *Výzkumná zpráva I, II: Measurement of composite parts for Mubea Transmission components*, Technická univerzita v Liberci.
- [10] Petrů, M., Bronček, P., Lepšík, P., Novák, O. (2014). *Experimental and numerical analysis of crack propagation in light composite materials under dynamic fracturing*, *Komunikace*, Vol.16(3a), p.82-89.
- [11] Wyk, C.M. (1946). *Note on the compressibility of wool*, *Journal of the Textile Institute*, Vol.37(12), p.285-292.
- [12] Neckář, B., Das, D. (2012). *Modelling of fibre orientation in fibrous materials*, *Journal of the Textile Institute*, Vol.103(3), p.330-340.
- [13] Petrů, M., Novák, O., Herák, D., Mašín, I., Lepšík, P., Hrabě, P. (2014). *Finite element method model of the mechanical behaviour of Jatropha curcas L. bulk seeds under compression loading: Study and 2D modelling of the damage to seeds*, *Biosystems Engineering*, Vol.127, p.50-66, doi:10.1016/j.biosystemseng.2014.08.011.
- [14] Petrů, M., Novák, O., Herák, D., Simanjuntak, S. (2012). *Finite element method model of the mechanical behaviour of Jatropha curcas L. seed under compression loading*, *Biosystems Engineering*, Vol.111, p.412-421, doi:10.1016/j.biosystemseng.2012.01.008.
- [15] Bittnar, Z., Sejnoha, J. (1996). *Numerical Methods in Structural Mechanics*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Thomas Telford Publications, London, p.442, ISBN: 0-7844-0170-5.
- [16] Voigt, W. (1889). *Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten Isotroper Körper*, *Wiedemanns Annalen der Physik und Chemie* (Lepzig), Vol.38 p.573-587.
- [17] Reuss, A. (1929). *Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle*, *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol.9, p.49-58.

- 
- [18] Younes, R., Hallal, A., Fardoun, F., Chehade, F.H. (2012). *Comparative Review Study on Elastic Properties Modeling for Unidirectional Composite Materials*, Chapter 17, Composites and Their Properties, INTECH, DOI: 10.5772/2816.
- [19] Halpin, J.C., Kardos, J.L. (1976). *The Halpin-Tsai equations: A review*, Polymer Engineering and Science, Vol.16(5).
- [20] Chamis, C.C. (1989). *Mechanics of composite materials: past, present, and future*. *Journal of Composites, Technology and Research*, Vol.11(1), p.3-14, DOI: 10.1520/CTR10143J.
- [21] Mori, T., Tanaka, K. (1973). *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions*, *Acta Metallurgica*, Vol. 21(5), p. 571–574, doi:10.1016/0001-6160(73)90064-3.
- [22] Hill, R. (1965). *Theory of mechanical properties of fibre-strengthen materials – III, Self consistent model*, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol.3, p.189-198.
- [23] Huang, Z.M. (2001). *Simulation of the mechanical properties of fibrous composites by the bridging micromechanics model*, *Composites: Part A*, Vol. 32(3), p.143-172.
- [24] Hashin, Z., Rosen, B.W. (1964). *The elastic moduli of fiber reinforced materials*, *Journal of Applied Mechanics*, *Trans ASME*, Vol.31, p.223-232.
- [25] Christensen, R.M. (1990). *A critical evaluation for a class of micromechanics models*, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 38(3), p. 379-404.
- [26] PAM CRASH, *Reference and solver notes manual 2005 a 2010*, <http://www.esi-group.com/>.
- [27] Petrů, M., Syrovátková, M., Martinec, T., Lepšík, P. (2015). *Analysis of Changes in the Surface Quality of a Ud Prepregs Composite due to Mechanical Loading*, *Material Science Forum*, Vol.818, p.109-112 doi:10.4028/www.scientific.net/MSF.818.109.
- [28] Petrů, M., Novák, O., Lepšík, P., Myšáková, D. (2015). *Experimental Analysis and Numerical Modelling of Interphase Interfaces of New Environmental Low-Energy Composites*, *Applied Mechanics and Materials*, Vol.732, p.95-98. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.732.95.
- [29] Belytschko, T., Liu, W. K., Moran, B. (2000). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, UK.
- [30] Flanagan, D.P.; Taylor, L.M. (1987). *An accurate numerical algorithm for stress integration with finite rotations*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.62., p.305–320.
- [31] Oliva, V. (1982). *Aplikovaná mechanika kontinua I. Elastomechanika*, ČVUT v Praze, skriptum, s.175.
- [32] Okrouhlík, M.; Höschl, C.; Plešek, J.; Pták, S.; Nadrchal, J.(1997). *Mechanika poddajných těles, numerická matematika a superpočítače*, ÚT, Praha.
- [33] Stříž, B. (2003). *Mechanika textilií 1,2*, Technická univerzita v Liberci.
- [34] Li, S. (2008). *Boundary condtions for unit cells from periodic microstructures and their implications*, *Composites Science and Technology*, Vol.68(9), p. 1962-1974, doi: 10.1016/j.compscitech.2007.03.035.
- [35] Novák, O., Petrů, M., Wrnata, V., Novák, J., Maryška, J. (2013-2014). *Výzkumná zpráva I,II: Modelování vlastností textilií*, Technická univerzita v Liberci.
- [36] Altair Hypermesh 12.1, <http://www.altairhyperworks.com>.
- [37] Petrů, M., Novák, O., Lepšík, P. (2014). *Finite element method model for study of the strain kinematics of interphase of new environmental low-energy composites*, MNE 2014 - Micro and Nano Engineering, Laussane.

- 
- [38] Lufinka, A., Petrů, M. (2015). *Analysis of the Tailgate Frame Composite Tube Mechanical Properties*, Applied Mechanics and Materials, Vol.732, p.235-238, DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.732.235.
- [39] Rektorys, K. (1999). *Variační metody v inženýrských problémech a problémech matematické fyziky*, Academia, Praha.
- [40] Petruška J. (2003). Počítačové metody mechaniky II, Metoda konečných prvků, FSI VUT Brno, <http://www.umt.fme.vutbr.cz/index.php?volba=skripta>.
- [41] Ševčík, L., Tůma, P., Petrů, M., Martinec, T., Kovář, R. (2013). Kompozitní výztuha, patentová žádost, č. 2013-1066.
- [42] Martinec, T., Mlýnek, J., Petru, M. (2015). *Calculation of the robot trajectory for the optimum directional orientation of fibre placement in the manufacture of composite profile frames*, Robotics and Computer Integrated Manufacturing, Vol. 35, p. 42–54, doi:10.1016/j.rcim.2015.02.004
- [43] Mareš, T.: *Základy konstrukční optimalizace*, ČVUT v Praze, s.307, ISBN 80-239-6508-5.
- [44] Petrů, M., Syrovátková, M., Kolínová, M., Novák, O. (2015). *X-Ray Microtomograph Detection of Internal Defects for a Ud Prepreg Composite*, Material Science Forum, Vol.818. p.295-298, doi:10.4028/www.scientific.net/MSF.818.295.
- [45] Utting, W.S., Jones, N. (1987). *The response of wire rope strands to axial tensile loads. 2.Comparison of experimental results and theoretical predictions*, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.29(9), p.621-636, doi:10.1016/0020-7403(87)90034-8.
- [46] Lee, W.K. (1991). *An insight into wire rope geometry*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 28 (4), p. 471–490.
- [47] Hobbs, R.E., Nabijou, S. (1995). *Changes in wire curvatures as a wire rope is bent over a sheave*, The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, Vol.30(4), p.271-281.
- [48] Raoof, M., Kraincanic, I. (1995). *Analysis of large-diameter steel ropes*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 121(6), p.667-675.
- [49] Knapp, R.H., Das, S., Shimabukuru, T.A. (2002). *Computer-aided design of cables for optimal performance – geometric modelling and finite element software for structural design of cables*, Sea Technology, Vol.43(7), p. 41-46.
- [50] Leech, C.M., Hearle, J.W.S., Overtington, M.S., Banfield, S.J. (1993). *Modelling tension and torque properties of fibre ropes and splices*, In: Proceedings of the third international offshore and polar engineering conference, Singapore, June 6-11.
- [51] Stanova, E., Fedorko, G., Fabian, M., Kmet, S. (2011). *Computer modelling of wire strands and ropes part II: Finite element-based applications*, Advances in Engineering Software, Vol. 42., p.322-331, doi:10.1016/j.advengsoft.2011.02.010.
- [52] Gürdal, Z., Haftka, R. T., Hajela, P. (1999). *Design and Optimization of Laminated Composite Materials*, John Wiley & Sons, London, New York, p.352, ISBN 978-0-471-25276-4.
- [53] Alexejev, V. M., Tichomirov, V. M., Fomin, S. V. (1991). *Matematická teorie optimálních procesů*, Academia, Praha, s. 357, ISBN 80-200-0319-3.
- [54] Lufinka, A., Petrů, M. (2014). *Determination of the Composite Tube Mechanical Properties*, 52th International Conference experimental stress analysis (EAN 52), Mariánské Lázně, Czech Republic, 2014, ISBN 978-80-231-0377-6, p. 4.

- 
- [55] Clinckemaiellie, J., Galbas, H. G., Kolp, O., Thole, C. A., Vlachoutsis, S. (2000). *High Scalability of Parallel PAM-CRASH with a New Contact Search Algorithm*, Lecture Notes in Computer Science, Vol.1823, p.439-444.
- [56] Birbil, S.I, Frenk, J.B.G., Still, G.J. (2007). *An elementary proof of the Fritz-John and Karush-Kuhn-Tucker conditions in nonlinear programming*. European Journal of Operational Research, Vol. 180(1), p.479-484.
- [57] Mašín, I., Petrů, M., Novák, O. (2015). *Metody inovačního inženýrství na mikro-úrovni*, TU v Liberci, p.270, ISBN 978-80-7494-187-0.
- [58] Hana, P., Inneman, A., Daniel, V., Sieger, L., Petru, M. (2014). *Mechanical properties of carbon fiber composites for applications in space*, Proc. SPIE 9442, Optics and Measurement Conference 2014, 94420A; doi:10.1117/12.2175925.
- [59] Teply, J.L., Reddy, J.N. (1990). *Unified formulation of micromechanics models of fiber-reinforced composites*. In: Dvorak GJ, editor. Inelastic deformation of composite materials, New York: Springer, p.341–370.
- [60] Berthelot J.M. (1999). *Composite materials: mechanical behavior and structural analysis*, New York: Springer, p. 158–81.
- [61] Petrů, M., Lepšík, P., Novák, O. (2014). *Research of new composites for lightweight construction with low impact on the environment*, 55th International Conference of Machine Design Departments (ICMD2014), Beroun, Česká Republika, 2014, p.307 – 312, ISBN 978-80-7372-968-8.
- [62] Petrů, M., Novák, O., Lepšík, P. (2014). *Numerical and experimental analysis of composite reinforcements applicable for a car seat innovation*, scientific journal Technológ, Vol.6, p.195-200, ISSN 1337-8996.
- [63] Lufinka, A.; Petrů, M. (2014). *Determination of the Composite Tube Mechanical Properties*, 52th International Conference experimental stress analysis (EAN 52), Mariánské Lázně, Czech Republic, p. 69, ISBN 978-80-231-0377-6.
- [64] Huang, Z.M., Zhou, Y.X. (2012). *Strength of Unidirectional Composites*, Advanced Topics in Science and Technology in China, p.99–143, doi: 10.1007/978-3-642-22958-9\_4.
- [65] Gibson, R.F. (1994). *Principles of composite material mechanics*, McGraw-Hill, Inc., New York: Springer, p.425. ISBN O-07-023451-5.
- [66] Soden, P.D., Hinton, M.J., Kaddour, A.S. (1998) *Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fiber-reinforced composite laminates*, Composites Science and Technology, Vol.58(7), p.1011–1022, doi:10.1016/S0266-3538(98)00078-5.
- [67] Ye, J., Qiu, Y., Chen, X., Ma, J. (2015). *Initial and final failure strength analysis of composites based on a micromechanical method*, Composite Structures, Vol.125, p.328–335.